

Maria de Lurdes Vasconcelos Babo e Silva

Contributos para a Avaliação de Opções Financeiras



*Tese submetida à Faculdade de Ciências
da Universidade do Porto para obtenção do grau de Doutor
em Matemática Aplicada*

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2016

Para a família maravilhosa que habita no meu coração!

Agradecimentos

Este momento tão ansiado, é o culminar de um longo caminho que só foi possível graças ao contributo de várias pessoas.

Em primeiro lugar, quero expressar o mais profundo agradecimento aos meus orientadores, Professora Eduarda Silva e Professor Nelson Areal, pela sua enorme disponibilidade, paciência e sabedoria. Duas pessoas maravilhosas a quem estou eternamente grata.

Ao Doutor António Pedrosa agradeço a compreensão e amizade demonstradas ao longo de todo este tempo.

Ao ISCAP e Politécnico do Porto agradeço o apoio financeiro concedido.

Aos meus amigos do ISCAP, José Azevedo, Ana Paula Lopes e Vera Lúcia pela amizade e incentivo. À minha amiga e “companheira de viagem” Cristina Torres que continuamente me deu força e coragem para prosseguir.

Aos meus amigos de longa data por compreenderem as minhas ausências e pelo ânimo que me transmitiram.

Aos meus queridos pais, irmãs e sobrinha Luísa por todo o suporte de amor e carinho.

Ao Jorge pelo seu amor, paciência e apoio incondicional.

À minha adorada filha Sofia, que sentiu as minhas “hibernações” mas que diariamente me cobre de beijinhos e me dá uma enorme força!

Resumo

Nesta dissertação, pretende-se dar um contributo para uma melhor aproximação do valor de opções de estilo Americano, usando simulações Monte Carlo e o método *Least Squares Monte Carlo*. Focamo-nos essencialmente em métodos que intervêm na simulação de caminhos para os preços do ativo subjacente.

O método Monte Carlo usa conjuntos de pontos independentes e uniformemente distribuídos. Os métodos Quasi-Monte Carlo usam sequências determinísticas de pontos, as sequências de baixa discrepância, que preenchem o espaço de forma mais uniforme, reduzindo assim o erro na aproximação Monte Carlo.

Modelos GARCH são habitualmente usados na simulação de séries financeiras. Estas séries possuem frequentemente caudas mais pesadas do que a Normal e pode ser adequado usar outras distribuições para os erros. As distribuições *t-Student*, *t-Student* assimétrica, Normal Inversa, Distribuição Generalizada do Erro, Hiperbólica Generalizada, entre outras, são alternativas encontradas na literatura. O método *Filtered Historical Simulation* usa uma abordagem não paramétrica baseada em técnicas de *bootstrap* para capturar as características empíricas das séries históricas dos retornos e gerar os preços do ativo subjacente a partir de um processo adequado.

Nesta tese investigamos a aplicação dos métodos Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo na avaliação de opções Americanas, combinados com técnicas de redução da variância. Procuramos introduzir melhoramentos que permitam, com um menor número de simulações, obter uma dada precisão.

Palavras-chave: Opções Americanas · Monte Carlo · Quasi-Monte Carlo · *Least Squares Monte Carlo* · Modelos GARCH

Abstract

This thesis aims to make a contribution to a better approximation of the value of American options using Monte Carlo simulations and the method *Least Squares Monte Carlo*. We focus primarily on methods for simulating paths to the underlying asset price.

The Monte Carlo method uses sets of independent and evenly distributed points. Quasi-Monte Carlo methods use deterministic sequences of points, the low discrepancy sequences, which fill the space more evenly and reduce the Monte Carlo approximation error.

GARCH models are commonly used in the simulation of financial time series. Given the well known fat tails of these series, it may be more appropriate to use a distribution with fatter tails than the normal distribution. The *Student-t* distribution, asymmetric *Student-t*, Normal Inverse, Generalized Error Distribution, Generalized Hyperbolic, among others, are suitable alternatives to the error distribution. The method *Filtered Historical Simulation* uses nonparametric approach based on *bootstrap* techniques to capture the empirical characteristics of time series of returns and generate paths for the underlying from a suitable generating process.

This dissertation investigates the application of Monte Carlo methods, and Quasi-Monte Carlo in pricing American options, together with variance reduction techniques. We tried to introduce improvements that allow, with a smaller number of simulations to obtain a given accuracy.

Keywords: American Options · Monte Carlo · Quasi-Monte Carlo · Least Squares Monte Carlo · GARCH Models

Conteúdo

Conteúdo	ix
Lista de tabelas	xi
Lista de figuras	xv
1 Introdução	1
2 Conceitos fundamentais	5
2.1 Mercados Financeiros	5
2.2 Contratos de opções	6
2.3 Séries temporais financeiras	8
2.3.1 Retornos	9
2.3.2 Características das séries financeiras	11
2.3.3 Modelos ARCH e GARCH	14
2.4 Avaliação de opções	18
3 Métodos Monte Carlo	23
3.1 Método Monte Carlo básico	24
3.2 Método Quasi-Monte Carlo	27
3.2.1 Conceitos e propriedades	29
3.2.2 Principais construções de baixa discrepância	37
3.3 Técnicas de redução da variância	44
3.3.1 Variáveis Antitéticas	45
3.3.2 Variáveis de controlo	47
3.3.3 Importance sampling	50
3.3.4 Amostragem estratificada	53

3.3.5	Hipercubo Latino	55
3.3.6	Monte Carlo Condicional	55
3.4	Aplicações	56
4	Aplicação à simulação de séries temporais	59
4.1	Modelos Lineares	63
4.2	Modelos não Lineares	73
5	Aplicação à avaliação de opções	81
5.1	O método <i>Least Squares Monte Carlo</i>	81
5.2	LSMC para opções Americanas baseadas num processo GARCH	84
5.2.1	Comparação com o painel A da tabela 4 de Stentoft (2005) . . .	86
5.2.2	Comparação com o painel B da tabela 4 de Stentoft (2005) . . .	96
5.2.3	Aplicação a um conjunto alargado de opções	103
6	Comentários Finais	117
	Apêndice A. Anexos do Capítulo 4	121
	Apêndice B. Anexos do Capítulo 5	157
	Bibliografia	229

Lista de tabelas

3.1	Formulação Simulação <i>versus</i> Integração	25
3.2	Primeiros elementos da sequência de <i>van der Corput</i> na base 2	38
4.1	Modelos usados para simulação	63
4.2	MARE (%) para a estimativa da média de x_{10}	67
4.3	MARE (%) para a estimativa da média de x_{130}	68
4.4	MARE (%) para a estimativa da média de x_{270}	69
4.5	MARE (%) para a estimativa da variância de x_{10}	70
4.6	MARE (%) para a estimativa da variância de x_{130}	71
4.7	MARE (%) para a estimativa da variância de x_{270}	72
4.8	$MSE \times 10^6$ para a estimativa da média de r_{10}	79
4.9	$MSE \times 10^6$ para a estimativa da média de r_{130}	79
4.10	$MSE \times 10^6$ para a estimativa da média de r_{270}	79
4.11	$MSE \times 10^6$ para a a estimativa da variância de r_{10}	80
4.12	$MSE \times 10^6$ para a a estimativa da variância de r_{130}	80
4.13	$MSE \times 10^6$ para a a estimativa da variância de r_{270}	80
5.1	LSMC sem antitéticas	87
5.2	Medidas de erro LSMC sem antitéticas	87
5.3	LSMC com antitéticas	88
5.4	Medidas de erro LSMC com antitéticas	88
5.5	LSMC com Halton	89
5.6	Medidas de erro LSMC com Halton	89
5.7	LSMC com Halton e antitéticas	89
5.8	Medidas de erro LSMC com Halton e antitéticas	90
5.9	LSMC com Sobol	90

5.10	Medidas de erro LSMC com Sobol	91
5.11	LSMC com Sobol e Owen <i>scrambling</i>	91
5.12	Medidas de erro LSMC com Sobol e Owen <i>scrambling</i>	92
5.13	LSMC com Sobol e Faure-Tezuka <i>scrambling</i>	92
5.14	Medidas de erro LSMC com Sobol e Faure-Tezuka <i>scrambling</i>	92
5.15	LSMC com Sobol e antitéticas	93
5.16	Medidas de erro LSMC com Sobol e antitéticas	93
5.17	LSMC com Sobol, antitéticas e Owen <i>scrambling</i>	94
5.18	Medidas de erro LSMC com Sobol, antitéticas e Owen <i>scrambling</i>	94
5.19	LSMC com Sobol, antitéticas e Faure-Tezuka <i>scrambling</i>	95
5.20	Medidas de erro LSMC com Sobol, antitéticas e Faure-Tezuka <i>scrambling</i>	95
5.21	LSMC sem antitéticas	96
5.22	Medidas de erro LSMC sem antitéticas	97
5.23	LSMC com antitéticas	97
5.24	Medidas de erro LSMC com antitéticas	97
5.25	LSMC com Halton	98
5.27	LSMC com Halton e antitéticas	98
5.29	LSMC com Sobol	99
5.31	LSMC com Sobol e Owen <i>scrambling</i>	100
5.33	LSMC com Sobol e Faure-Tezuka <i>scrambling</i>	100
5.35	LSMC com Sobol e antitéticas	101
5.37	LSMC com Sobol, antitéticas e Owen <i>scrambling</i>	102
5.39	LSMC com Sobol, antitéticas e Faure-Tezuka <i>scrambling</i>	102
5.41	Todas as opções	106
5.42	Opções com até 20 dias para a maturidade	107
5.43	Opções com 30, 40 e 60 dias para a maturidade	108
5.44	Opções com 80, 90 e 120 dias para a maturidade	109
5.45	Opções com 180, 240 e 270 dias para a maturidade	110
5.46	Amostra de opções com um preço superior a 0.5	112
5.47	Opções com até 20 dias para a maturidade	113
5.48	Opções com 30, 40 e 60 dias para a maturidade	114
5.49	Opções com 80, 90 e 120 dias para a maturidade	115
5.50	Opções com 180, 240 e 270 dias para a maturidade	116
A. 1	Outros coeficientes PRN sem antitéticas, t=10 (10,100 e 1000 réplicas)	125

A. 2	Outros coeficientes PRN sem antitéticas, t=130 (10,100 e 1000 réplicas)	126
A. 3	Outros coeficientes PRN sem antitéticas, t=270 (10,100 e 1000 réplicas)	127
A. 4	Outros coeficientes PRN com antitéticas, t=10 (10,100 e 1000 réplicas)	128
A. 5	Outros coeficientes PRN com antitéticas, t=130 (10,100 e 1000 réplicas)	129
A. 6	Outros coeficientes PRN com antitéticas, t=270 (10,100 e 1000 réplicas)	130
A. 7	Outros coeficientes Halton	131
A. 8	Outros coeficientes Halton com antitéticas	132
A. 9	Outros coeficientes Sobol	133
A. 10	Outros coeficientes Sobol com antitéticas	134
A. 11	Outros coeficientes Sobol S	135
A. 12	Outros coeficientes Sobol S com antitéticas	136
A. 13	Testes ajuste PRN, t=10 (10,100 e 1000 réplicas)	137
A. 14	Testes ajuste PRN, t=130 (10,100 e 1000 réplicas)	138
A. 15	Testes ajuste PRN, t=270 (10,100 e 1000 réplicas)	139
A. 16	Testes ajuste Halton	140
A. 17	Testes ajuste Sobol	141
A. 18	Testes ajuste Sobol S	142
A. 19	Outros coeficientes PRN, t=10 (10, 100 e 1000 réplicas)	144
A. 20	Outros coeficientes PRN com antitéticas, t=10 (10, 100 e 1000 réplicas)	145
A. 21	Outros coeficientes PRN, t=130 (10, 100 e 1000 réplicas)	146
A. 22	Outros coeficientes PRN, com antitéticas, t=130 (10, 100 e 1000 réplicas)	147
A. 23	Outros coeficientes PRN, t=270 (10, 100 e 1000 réplicas)	148
A. 24	Outros coeficientes PRN, com antitéticas, t=270 (10, 100 e 1000 réplicas)	149
A. 25	Outros coeficientes Sobol	150
A. 26	Outros coeficientes Sobol com antitéticas	151
A. 27	Outros coeficientes Sobol S	152
A. 28	Outros coeficientes Sobol S com antitéticas	153
A. 29	Testes ajuste PRN, t=10 (10,100 e 1000 réplicas)	154
A. 30	Testes ajuste PRN, t=130 (10,100 e 1000 réplicas)	154
A. 31	Testes ajuste PRN, t=270 (10,100 e 1000 réplicas)	154
A. 32	Testes ajuste Sobol	155
A. 33	Testes ajuste Sobol S	155

Lista de figuras

3.1	Sequência de números pseudo-aleatórios (esq) e sequência de números determinísticos (dir)	28
3.2	Efeito da dimensão nas sequências de Halton para $s = 10, 130, 270$	40

1. Introdução

Os mercados de derivados financeiros evoluíram rapidamente desde que o *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) iniciou as suas atividades em 1973, tanto em número de produtos como na sua complexidade. Em particular, o mercado de opções representa uma área muito ativa dentro dos mercados financeiros, sendo a avaliação de opções crucial para esta área.

Um dos tipos de opções mais transacionado nos mercados, são as opções de estilo Americano. Estes contratos dão ao seu detentor o direito de comprar ou vender um determinado ativo subjacente, em qualquer momento até à data de expiração do contrato. Por este direito, o comprador paga ao vendedor o prémio (preço justo da opção). Contrariamente às opções Europeias que só podem ser exercidas num momento específico, a maturidade, a avaliação de opções Americanas representa um enorme desafio uma vez que, para além do cálculo do seu valor, envolve a decisão do momento de exercício ótimo já que em cada momento, é necessário decidir se a opção deve ser exercida de imediato ou se deve continuar ativa. O valor da opção é dado pelo valor esperado, sob uma medida adequada, do *payoff* descontado com base numa estratégia de exercício ótimo.

Perante a inexistência de soluções analíticas, métodos computacionais baseados em diferenças finitas ou árvores binomiais têm sido usados para resolver este problema. No entanto, a elevada complexidade computacional, principalmente quando se incorporam diversos fatores estocásticos, conduziu ao aparecimento de novas abordagens. Metodologias baseadas em técnicas de simulação surgem na literatura como alternativas de sucesso aos métodos tradicionais.

Nesta tese pretende-se dar um contributo para uma melhor aproximação no cálculo do valor de opções de estilo Americano usando simulações Monte Carlo. Esta abordagem envolve, essencialmente, três passos: a simulação dos caminhos para o ativo subjacente

a partir de um processo adequado, a determinação do *payoff* ao longo desses caminhos e o cálculo do preço da opção como sendo a média descontada dos *payoffs* até ao momento inicial ao longo de todos os caminhos.

Para o cálculo do preço da opção usaremos o método *Least Squares Monte Carlo* (LSMC) proposto por Longstaff e Schwartz (2001). A cada instante anterior à data de vencimento, o detentor da opção Americana compara o *payoff* do exercício imediato com o valor de manter a opção ativa (valor de continuação) e assim define uma estratégia de exercício ótimo. Este método baseia-se em regressão mínimos quadrados para aproximar o valor de continuação da opção e estimar o momento ótimo de exercício. Esta dissertação foca-se essencialmente em métodos que intervêm na simulação dos caminhos dos preços do ativo subjacente, com vista a obter uma melhor aproximação do preço de opções Americanas.

Habitualmente a simulação dos caminhos é feita usando o método Monte Carlo básico (*crude Monte Carlo*). Embora este método seja bastante atrativo, uma vez que é independente da dimensão do problema, ele é muitas vezes considerado demasiado lento para as necessidades de mercado. Este problema conduziu-nos à ideia de utilizar métodos de amostragem alternativos na simulação de séries temporais lineares e não lineares para o preço do ativo subjacente. O método Monte Carlo (MC) utiliza um conjunto de pontos independentes e uniformemente distribuídos. Na prática usam-se números pseudo-aleatórios. Os métodos Quasi-Monte Carlo (QMC) usam sequências determinísticas de pontos, mais regularmente distribuídos e que aproximam a distribuição uniforme *tanto quanto possível*.

Uma outra forma de aumentar a eficiência das simulações Monte Carlo é através da utilização de técnicas de redução da variância. Esta metodologia recorre a duas estratégias: por um lado, tenta ajustar ou corrigir os *outputs* aproveitando características específicas do modelo em estudo, e por outro, reduzindo a variabilidade dos *inputs* da simulação.

Um outro aspeto que devemos considerar na simulação das séries dos preços do ativo subjacente a uma opção, é que estas devem reproduzir as características empíricas observadas nos dados. Entre os modelos mais comuns para a dinâmica da volatilidade dos retornos encontram-se os modelos GARCH. Como salientam diversos autores (Bollerslev *et al.*, 1994; Christoffersen *et al.*, 2006; Cont, 2001; Zivot, 2009), os modelos GARCH com erros normalmente distribuídos parecem não incorporar algumas características das séries temporais financeiras. Na literatura podem encontrar-se diversas

alternativas para a distribuição dos erros: *t-Student*, *t-Student* assimétrica, distribuição Normal Inversa, distribuição hiperbólica generalizada, entre outras. O método *Filtered Historical Simulation* (FHS) proposto por [Barone-Adesi et al. \(2008\)](#) usa uma outra abordagem, não paramétrica, baseada em técnicas de *bootstrap* para capturar as características empíricas das séries históricas dos retornos e gerar os caminhos para os preços do ativo subjacente a partir de um processo adequado. A não assunção *a priori* de uma distribuição para as inovações, permite que características como a assimetria, curtose e outros comportamentos extremos dos retornos sejam capturados na verdadeira densidade das inovações.

Nesta tese avaliamos o desempenho dos métodos Monte Carlo, e Quasi-Monte Carlo no contexto de avaliação de opções Americanas quando o ativo subjacente é modelado por um processo GARCH. Este estudo envolveu duas fases. Na primeira, abordamos a simulação de caminhos para o ativo subjacente tendo comparado os diversos métodos em modelos lineares e não lineares. Na segunda, comparamos o desempenho dos métodos quando aplicados à avaliação de opções de estilo Americano. Analisamos ainda o efeito da utilização de técnicas de redução da variância aplicadas a vários modelos. Procuramos introduzir melhoramentos que permitam, com um menor número de simulações, melhorar a convergência e a precisão da aproximação do preço da opção.

Para testar as diferentes abordagens foram realizados diversos estudos empíricos que envolveram a implementação de diversos algoritmos usando a linguagem **R** e que são apresentados em apêndice.

Diversos contributos podem ser encontrados nesta dissertação. Em primeiro lugar, a análise comparativa dos métodos MC e QMC aplicados a séries temporais lineares e não lineares. Em segundo, a aplicação destes métodos a um elevado número de opções Americanas usando o método LSMC combinado com modelos GARCH para o subjacente com erros não gaussianos. Por último, a análise dos efeitos de introdução de técnicas de redução da variância nestes métodos. Tanto quanto é do nosso conhecimento, este é o primeiro trabalho que realiza um estudo tão alargado combinando todas estas metodologias.

Esta tese está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 faz-se o enquadramento teórico definindo alguns conceitos relacionados com a avaliação de opções e que são fundamentais para o entendimento dos restantes capítulos. No capítulo 3 apresentam-se os métodos Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo. Descrevem-se ainda algumas técnicas de redução da variância. No Capítulo 4, apresentamos as várias aplicações na simu-

lação de séries temporais lineares e não lineares. Comparamos os resultados obtidos com base em várias medidas. No Capítulo 5, é especificado o problema de avaliação de opções Americanas e apresentado em detalhe o método *Least Squares Monte Carlo*. São ainda descritos os resultados numéricos comparativos que envolveram os vários métodos abordados no presente estudo quando aplicados à avaliação de opções Americanas. Em cada capítulo é feita uma revisão de literatura sobre o tema em análise, salientando referências históricas e investigação recente. Terminamos com o capítulo 6, sumariando as principais conclusões e perspectivas de trabalho futuro.

2. Conceitos fundamentais

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos fundamentais para o entendimento dos temas tratados nesta tese.

A contextualização histórica pretende enquadrar no tempo os factos mais relevantes para a evolução dos mercados.

2.1 Mercados Financeiros

Os produtos transacionados nos mercados financeiros são diversos. Derivados são instrumentos financeiros, cujo valor depende do bem ou ativo financeiro que lhe está subjacente. As ações, os índices acionistas, as mercadorias, as divisas e as obrigações são exemplos de ativos subjacentes a um derivado. Como exemplos de derivados refira-se os contratos *forward*, de futuros, de opções ou os *swaps*.

O primeiro mercado organizado de futuros, *Chicago Board of Trade* (CBOT), surgiu em 1848 nos EUA, e em 1919 o *Chicago Mercantile Exchange* (CME). Mais tarde, surgem os mercados de opções, *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) em 1973 e o *London International Financial Futures and Options Exchange* (LIFFE). Em Portugal, o mercado de derivados foi inaugurado no Porto, em meados de 1996. Em finais de 1999 a *Bolsa de Valores do Porto* (BVP) fundiu-se com a *Bolsa de Valores de Lisboa* (BVL) dando origem à *Bolsa de Valores de Lisboa e Porto* (BVLP). Inicialmente transacionavam-se apenas futuros, tendo o primeiro contrato de opções ocorrido em Março de 1999. A BVLP foi integrada na *Euronext* em dezembro de 2001, sendo atualmente designada por *Euronext Lisboa*.

Os produtos transacionados nos mercados evoluíram muito, quer em número quer em diversidade. Produtos cada vez mais complexos surgem a cada dia, trazendo novos

desafios à investigação.

Um dos problemas mais importantes da área financeira é a determinação do preço de produtos derivados, concretamente de opções, e o estudo do comportamento dos ativos financeiros que lhe estão subjacentes. Este problema trouxe enormes desafios para a Matemática, que se tem debatido ao longo do tempo por desenvolver e aperfeiçoar modelos e métodos que melhor representem os comportamentos dos mercados financeiros.

2.2 Contratos de opções

Opções financeiras são contratos que concedem ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender um determinado ativo subjacente, por um determinado preço, numa (ou até uma) data futura. O possuidor do contrato tem o direito, mas não a obrigação, de o exercer se assim o decidir. O vendedor, por seu lado, é obrigado a vender ou comprar o subjacente nas condições estabelecidas no contrato. Podemos considerar dois tipos de opções: opções de compra (*calls*) e opções de venda (*puts*). Uma opção *call* dá o direito (mas não o dever) ao seu possuidor de comprar uma quantidade específica de um ativo subjacente, por um determinado preço em (ou até) determinada data futura. Uma opção *put* dá o direito ao seu possuidor de vender uma quantidade específica de um ativo subjacente, por um determinado preço em (ou até) determinada data futura. O detentor de cada um destes contratos pode ou não exercer o seu direito, mas o vendedor ou subscritor (*writer*) tem a obrigação de vender (no caso de uma *call*) ou comprar (no caso de uma *put*) o ativo, se esse for o desejo do detentor. Por este direito, o comprador paga ao vendedor, aquando da celebração do contrato, um valor que se designa por **prémio** ou **preço da opção** no momento da compra. A data limite em que o comprador poderá exercer a opção, é designada por **maturidade** (*maturity*), data de exercício, vencimento ou expiração. O valor pelo qual o ativo subjacente poderá ser comprado ou vendido no momento de exercer o contrato é chamado **preço de exercício** (*strike price*). Se a opção não for exercida diz-se que “expira”, não havendo qualquer transação. Além da maturidade e valor de exercício, o contrato deve especificar também o valor da opção em função do valor do ativo subjacente na maturidade. Esta função que depende do valor do subjacente na maturidade designa-se por *payoff*. Se S_T designar o valor do ativo subjacente na

maturidade T e K o preço de exercício, o valor da opção *call* na maturidade é

$$\max \{S_T - K, 0\}. \quad (2.1)$$

No caso de uma *put*, o valor da opção na maturidade é dado por

$$\max \{K - S_T, 0\}. \quad (2.2)$$

Os lucros são calculados descontando o prémio inicialmente pago ao *payoff*.

As opções são caracterizadas pelo seu *payoff* e pelo tipo de exercício definido no contrato. Concretamente, atendendo à data de exercício, podemos definir vários tipos de opções, como por exemplo, **opções europeias**, só podem ser exercidas na maturidade, **opções americanas**, podem ser exercidas em qualquer momento até à maturidade e **opções bermudas**, que podem ser exercidas em algum intervalo de tempo pré determinado. Relativamente ao *payoff*, podemos distinguir dois tipos de opções: aquelas cujo *payoff* é dado por (2.1) ou (2.2) e que se designam por **opções vanilla**, e as **opções exóticas** (ou dependentes da trajetória) que contrastam com estas por possuírem *payoffs* que dependem do histórico do valor do subjacente e não só do seu valor no exercício.

O valor de uma opção tem duas componentes: o valor intrínseco e o valor temporal. O **valor intrínseco** de uma opção num determinado instante é o valor do *payoff* supondo que a opção é exercida nesse instante. Assim, sendo S_t o valor do ativo subjacente nesse instante, o valor intrínseco de uma *call* é dado por

$$\max \{S_t - K, 0\}$$

e por

$$\max \{K - S_t, 0\}$$

no caso de uma opção *put*.

Uma opção com valor intrínseco positivo diz-se que está **In-the-money** (ITM) (no dinheiro). Para uma *call*, significa que $S_t > K$, e que $S_t < K$ no caso de uma *put*. Se o valor intrínseco é nulo, a opção está **Out-of-the-money** (OTM) (fora do dinheiro). Numa *call* $S_t < K$ e numa *put* $S_t > K$. Quando $K \approx S_t$ diz-se que a opção está **At-the-money** (ATM) (ao dinheiro).

O **valor temporal** reflete a incerteza do comportamento do preço do subjacente durante a maturidade da opção e depende de uma série de fatores, como veremos mais

adiante. O prémio é a soma do valor intrínseco com o valor temporal.

O problema essencial em Finanças, e que tem sido objeto de modelação matemática, é a determinação do valor justo da opção, isto é, o valor do prémio.

Os contratos de opções tornaram-se importantes instrumentos financeiros porque são muito usados para reduzir ou eliminar o risco (*hedging*) e também porque permitem obter ganhos, com risco controlado, potencialmente mais elevados do que aqueles que se obteriam negociando o ativo subjacente. Esta possibilidade de controlar grandes quantias utilizando relativamente pouco capital é designada na área financeira por *alavancagem*. Muitos investidores preferem transacionar opções em vez de ativos para evitar certos custos de transação (Kolb e Overdahl, 2007).

2.3 Séries temporais financeiras

O desenvolvimento de metodologias de avaliação de derivados implica o estudo dos ativos subjacentes e a análise das séries financeiras associadas. Geralmente, esta análise é realizada usando a série dos retornos em vez da série dos preços do ativo. Para além de conterem informações de interesse para os investidores, as séries dos retornos possuem propriedades estatísticas mais atrativas, como a estacionariedade e ergodicidade, tornando possível a sua modelação e análise (Brooks, 2014; Campbell *et al.*, 1997; Tsay, 2005).

A observação de certas propriedades evidenciadas por diversas séries financeiras, tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento e aperfeiçoamento de modelos que melhor capturem as características dos dados. Estudos empíricos em diversos mercados têm evidenciado a existência de diversas regularidades estatísticas gerais, partilhadas por diferentes séries de retornos: heterocedasticidade condicional, distribuições com caudas pesadas, efeito *leverage* (alavanca), presença de *clusters* (aglomerados) na volatilidade, entre outros.

Por forma a acomodar estas propriedades, diversos modelos têm sido propostos ao longo dos tempos. Os modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional ARCH e GARCH têm sido utilizados intensamente em finanças uma vez que permitem a incorporação de propriedades empíricas comuns das séries temporais financeiras (Balbás *et al.*, 2005; Teräsvirta, 2009).

Neste capítulo apresentamos algumas definições e propriedades relacionadas com sé-

ries temporais financeiras para um melhor entendimento dos vários assuntos tratados ao longo dos diversos capítulos. Abordaremos ainda os modelos ARCH, GARCH e algumas modificações deste e as suas principais características.

2.3.1 Retornos

Podemos definir vários tipos de retornos e distinguir o caso discreto (retornos simples) do caso contínuo (retornos compostos continuamente).

Retornos Simples

Seja P_t o preço de um ativo financeiro que não paga dividendos¹ (uma ação, um índice, uma taxa de câmbio,...) no momento t ($t = 0, 1, \dots$)².

Define-se o *retorno líquido simples* (ou retorno relativo) de um certo investimento no momento t (retorno entre os instantes $t - 1$ e t) por

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (2.3)$$

e o *retorno bruto simples* como sendo

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (2.4)$$

A igualdade (2.4) pode ser escrita na forma

$$P_t = P_{t-1} (1 + R_t) \quad (2.5)$$

evidenciando que R_t representa a *taxa de rendibilidade* de um certo investimento, adquirido por P_{t-1} e vendido por P_t .

Analogamente, pode definir-se o *retorno líquido de um investimento em k períodos*, entre os instantes $t - k$ e t , por

$$R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1. \quad (2.6)$$

¹No caso do ativo financeiro pagar dividendos periodicamente e representando por D_t o dividendo pago entre os momentos $t - 1$ e t , nas definições (2.3), (2.4) e (2.9) deve substituir-se P_t por $P_t + D_t$.

² t em minutos, horas, dias, etc

O retorno bruto nos k períodos é dado por

$$\begin{aligned}
 1 + R_t[k] &= \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \dots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\
 &= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1}) \\
 &= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Retornos Anualizados

Para compararmos retornos referentes a diferentes escalas de tempo, é necessário converter as diferentes taxas de rendibilidade a um mesmo período. Habitualmente, o período de referência é o ano (o que corresponde a cerca de 250 dias de transação) e por isso consideram-se as rendibilidades anualizadas.

Se um certo investimento de valor P_0 for realizado no momento $t = 0$ e ao fim de T anos o seu valor for P_n , a taxa de rendibilidade anualizada R_A , desse investimento, obtém-se resolvendo a equação $P_0(1 + R_A)^T = P_n$, cuja solução é

$$R_A = \left(\frac{P_n}{P_0} \right)^{1/T} - 1. \tag{2.8}$$

Note-se que T pode ser não inteiro. Por exemplo, se o investimento se referir a um período de 3 meses, $T = \frac{3}{12} = 0.25$ anos, ou se o período for 800 dias, $T = \frac{800}{250} = 3.2$ anos.

Retornos contínuos

Considerando que a capitalização de um investimento P_0 é contínua e r é a taxa de rendibilidade instantânea anual, tem-se que o investimento resultante é

$$P_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n = P_0 e^r. \text{ Ou seja, a taxa de rendibilidade instantânea é dada por } r = \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right).$$

Se considerarmos uma sucessão de preços P_1, P_2, \dots, P_n , define-se a taxa de rendibilidade instantânea, retorno contínuo, **log-retorno** ou simplesmente retorno no momento t por

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = \ln(1 + R_t). \tag{2.9}$$

O desenvolvimento de $\ln(1+R_t)$ em série de Taylor em torno de $R_t = 0$ permite escrever

$$r_t = \ln(1 + R_t) \approx R_t - \frac{1}{2}R_t^2 + \frac{1}{3}R_t^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}R_t^n.$$

Este desenvolvimento é válido para todo R_t tal que $|R_t| < 1$ e neste caso, $R_t^n \rightarrow 0$. Assim, pode assumir-se que $r_t \approx R_t$. Para dados diários, semanais ou mensais as rendibilidades R_t são geralmente pequenas e neste caso é usual considerar-se $r_t \approx R_t$. O retorno **multi-período capitalizado continuamente** é dado por

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(1 + R_t[k]) = \ln[(1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1})] \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \dots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Habitualmente trabalha-se com a série dos log-retornos, r_t , uma vez que estes possuem algumas vantagens relativamente aos retornos relativos, R_t . Pelo facto de não possuírem unidades, os log-retornos são comparáveis entre si. Além disso, a série dos log-retornos podem ser modeladas por processos estocásticos estacionários, no sentido lato ou estrito (Mikosch, 2003). A simplicidade com que se calculam para múltiplos períodos através da expressão (2.10), também representa uma vantagem. Além disso, os log-retornos possuem propriedades estatísticas mais *tratáveis* como a estacionariedade e a ergodicidade (Campbell *et al.*, 1997; Tsay, 2005).

2.3.2 Caraterísticas das séries financeiras

As séries temporais financeiras possuem diversas caraterísticas e propriedades que são comuns a diversos instrumentos financeiros, mercados e períodos de tempo. Podem encontrar-se na literatura diversas referências que salientam a presença de tais regularidades nas mais variadas séries, e que são geralmente agrupadas sob a designação genérica de *factos estilizados*.

Listas mais ou menos vastas destes factos, resultantes de décadas de investigação, são apresentadas por Bollerslev *et al.* (1994), Cont (2001), Malmsten e Teräsvirta (2004), Zivot (2009), Chakraborti *et al.* (2011) e Zumbach (2015).

Ausência de autocorrelação

Habitualmente, os retornos de ativos apresentam pequenas autocorrelações que tendem rapidamente para zero em poucos minutos. A função de autocorrelação (ACF) apresenta valores insignificantes que podem ser ignorados para qualquer escala de tempo (desfasamento) superior a 15 minutos. Excetua-se o caso de dados de alta frequência onde se observa uma autocorrelação negativa para desfasamentos muito pequenos (Cont, 2001).

Caudas pesadas e excesso de curtose

Investigação empírica tem observado que as distribuições dos retornos são aproximadamente simétricas no centro, com pico acentuado e caudas pesadas com decrescimento assintótico lento. A forma da densidade mostra que a Normal não é o modelo que melhor se adapta a estas características. Distribuições como de *Pareto* ou *t-Student* parecem indicadas para modelar a distribuição não condicional dos retornos, como já havia sido proposto por Mandelbrot (1963). No entanto, estas características não são suficientemente restritivas para eleger uma distribuição em particular e podem encontrar-se na literatura diversos modelos paramétricos (*t-Student*, hiperbólica generalizada, Normal Inversa, ...), a maioria dos quais tendo em comum pelo menos quatro parâmetros: um parâmetro de localização, um parâmetro de escala (volatilidade), um parâmetro que descreva o decrescimento das caudas (índice de cauda) e um parâmetro de assimetria. A escolha entre várias classes é uma questão que envolve a tratabilidade analítica e numérica (Cont, 2001).

Assimetria nos ganhos/perdas

Embora a distribuição dos retornos seja aproximadamente simétrica no centro, pode observar-se alguma assimetria, especialmente em séries de preços e índices de ações, onde grandes descidas não são em geral acompanhadas por grandes subidas. Siven e Lins (2009) referem que demora mais a ganhar 5% do que a perder 5%. Habitualmente, esta assimetria não se revela nas taxas de câmbio, sendo os movimentos de subida/descida bastante simétricos.

Normalidade e agregação

A forma da distribuição não é a mesma para diferentes escalas de tempo. Aumentando a escala de tempo em que os retornos são calculados, as caudas tornam-se menos pesadas e a distribuição aproxima-se mais da Normal. Assim, está mais próxima da Normal a distribuição dos retornos mensais do que a distribuição dos retornos diários. Aumentando a frequência das observações acentua-se a não normalidade das distribuições.

Intermitência

Observa-se uma grande variabilidade dos retornos em qualquer escala de tempo. Esta variabilidade é usualmente quantificada através da presença de irregularidades bruscas nas séries, numa ampla variedade de estimadores da volatilidade. Como estes movimentos de mercado têm uma probabilidade significativa de ocorrência, não podem ser desprezados.

***Clusters* (aglomerados) de volatilidade**

Grandes variações no preço de um ativo (alta volatilidade) tendem a ser seguidas por grandes variações no preço e pequenas variações (baixa volatilidade) tendem a ser seguidas por pequenas variações. Esta tendência é habitualmente medida pela função de autocorrelação dos retornos absolutos ou dos retornos quadrados. Estudos empíricos mostram que esta função mantém-se positiva e vai decrescendo lentamente, em espaços de tempo de poucos minutos até várias semanas (Cont, 2007).

Caudas pesadas condicionais

Mesmo após a modelação dos retornos através de um modelo GARCH (para a correção dos aglomerados de volatilidade), a série dos resíduos ainda exhibe caudas pesadas, embora menos pesadas do que as da distribuição não condicional dos retornos.

Decrescimento lento da autocorrelação dos retornos absolutos

A função de autocorrelação apresenta valores não nulos para um grande número de

desfasamentos, tornando-se quase constante e positiva para desfasamentos de ordem elevada, indicando a existência de *memória longa* ou *dependência de longo alcance* dos retornos absolutos ou dos seus quadrados. A função de autocorrelação dos retornos absolutos diminui lentamente em função dos desfasamentos temporais, aproximadamente segundo uma lei potência de expoente no intervalo $[0.2, 0.4]$ (Cont, 2001).

Efeito *leverage* (alavanca)

A volatilidade parece reagir de forma diferente a grandes aumentos ou grandes descidas no preço do ativo. Choques negativos afetam a volatilidade condicional em maior magnitude do que os choques positivos. Observa-se uma tendência para alterações no preço estarem negativamente correlacionadas com alterações na volatilidade.

Assimetria nas escalas de tempo

As propriedades empíricas observadas nas séries dos retornos dependem da escala temporal escolhida. Se a unidade temporal é pequena, na ordem de segundos ou minutos, fala-se de *escalas finas*. Mas se unidade de tempo é na ordem de semanas ou meses, dizemos tratar-se de *escalas grossas*. Não só as propriedades das séries são diferentes, mas também se verifica que medidas da volatilidade obtidas através de escalas grossas preveem melhor a volatilidade em escalas finas do que o contrário (Gavrishchaka e Ganguli, 2003).

2.3.3 Modelos ARCH e GARCH

A família de modelos ARCH (*Autoregressive Conditional Heterocedasticity*), inicialmente desenvolvidos por Engle (1982), tem sido utilizada intensamente em finanças, uma vez que permite a incorporação de propriedades comuns nas séries temporais financeiras como a heterocedasticidade e a assimetria (Balbás *et al.*, 2005; Teräsvirta, 2009). Estes modelos consideram que os retornos atuais são influenciados não só pelos retornos passados (autorregressão) como também pela variância passada dos retornos,

que não é constante no tempo (heterocedasticidade). O modelo é composto por duas equações determinadas dinamicamente. Uma determina a variância condicional num instante t e utiliza essa variância para determinar o retorno na outra equação.

Seja \mathcal{F}_t o conjunto de informações disponíveis até ao momento t e ϵ_t uma variável aleatória cuja média $E[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ é nula e cuja variância condicional é $\sigma_t^2 = E[\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$.

O processo dos retornos é dado por

$$r_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \mu + \epsilon_t. \quad (2.11)$$

O processo ARCH de ordem p assume que a variância condicional, σ_t^2 , é dada por

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (2.12)$$

com $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ para garantir a positividade da variância condicional σ_t^2 .

As inovações ϵ_t podem ser escritas como $\epsilon_t = z_t \sigma_t$ onde $\{z_t\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid), com média nula e variância unitária. Na prática, é usual assumir-se que esta sequência de variáveis segue uma distribuição Normal, *t-Student* ou *t-Student* assimétrica, entre outras.

Engle (2004) considera que os modelos ARCH contribuíram para o desenvolvimento da área financeira e hoje em dia, generalizações destes modelos são dos mais usados na investigação nesta área.

Embora estes modelos sejam simples, por vezes requerem ordens elevadas e a estimação de muitos parâmetros para que possam adequadamente descrever o processo da volatilidade. **Bollerslev (1986)** propôs uma extensão destes modelos - os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*).

No modelo GARCH(p,q) a variância condicional é definida por

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.13)$$

com $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$.

Bollerslev et al. (1992) fazem referência a um elevado número de artigos que demonstram o sucesso dos modelos GARCH aplicados a dados financeiros. Aplicações dos mo-

delos GARCH na previsão da volatilidade podem ser encontradas em Poon e Granger (2003). No campo da avaliação de opções aplicações destes modelos podem encontrar-se nos trabalhos de Amin e Ng (1993), Duan (1995), Heston e Nandi (2000), Duan e Simonato (2001), Stentoft (2005) ou Stentoft (2008a). Para estudos mais recentes veja-se Stentoft (2013) ou a revisão de Christoffersen *et al.* (2013).

Engle (2004) realça a grande capacidade do modelo GARCH(1,1) para descrever a dinâmica da volatilidade dos retornos da maioria das séries financeiras. Embora, em muitos casos possa ser encontrado um modelo mais adequado, geralmente este modelo é um bom ponto de partida para especificações mais particulares.

Desde o seu aparecimento, o modelo GARCH foi sendo estendido em várias direções de modo a flexibilizar o modelo original.

A observação de certas propriedades evidenciadas em dados empíricos tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento e aperfeiçoamento de modelos que melhor capturem os factos estilizados.

Alguns modelos foram propostos para corrigir limitações de modelos anteriores na sua adequação à realidade. Das extensões mais comuns na literatura, encontram-se aquelas que incluem a incorporação no modelo do denominado efeito *leverage* (resposta assimétrica da variância a choques positivos e negativos). Neste grupo incluem-se os modelos GJR de Glosten *et al.* (1993) ou TARARCH de Zakoian (1994), o modelo GARCH assimétrico NGARCH de Engle e Ng (1993) ou o modelo GARCH de Sentana (1995), entre outros. Uma vasta lista, de mais de uma centena de modelos, pode ser encontrada em Bollerslev (2008).

GJR-GARCH

Um modelo que incorpora o efeito *leverage* da volatilidade é o modelo GJR-GARCH (Glosten *et al.*, 1993), onde a variância é representada pela equação

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}) \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.14)$$

sendo $\omega > 0$, $\alpha_i, \gamma_i, \beta_j$ não negativos e $I_{t-i} = 1$ se $\epsilon_{t-i} < 0$ e $I_{t-i} = 0$ no caso contrário, o parâmetro que permite a resposta assimétrica do modelo aos choques positivos e negativos.

EGARCH

Nelson (1991) introduziu o modelo EGARCH (*Exponential GARCH*) para permitir assimetrias entre o retorno e a volatilidade.

O modelo pode ser definido por

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{t-i} + \psi_i (|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2). \quad (2.15)$$

Este modelo permite respostas assimétricas a choques positivos e negativos e evita que se tenham que estabelecer condições para os parâmetros, uma vez que não é necessário garantir a positividade de $\ln(\sigma_t^2)$ (como acontece na equação (2.13) em que é necessário garantir a positividade da variância condicional em cada momento).

TS-GARCH

O modelo TS-GARCH de Taylor e Taylor (1986) e Schwert (1989) parametriza o desvio-padrão condicional em função do valor absoluto das inovações e dos desvios-padrão desfasados,

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\epsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}. \quad (2.16)$$

Este modelo atenua a influência de valores elevados nas observações, em valor absoluto, relativamente ao GARCH tradicional.

TGARCH

O modelo TGARCH (*Threshold GARCH*) proposto por Zakoian (1994), estende o modelo TS-GARCH permitindo que o desvio-padrão condicional dependa do sinal das inovações. Este modelo é semelhante ao modelo GJR representada pela equação (2.14), e pode ser obtido substituindo a variância condicional pelo desvio-padrão e o quadrado das inovações pelo valor absoluto destas, na referida equação.

NGARCH

O modelo NGARCH (*Nonlinear asymmetric GARCH*) proposto por Engle e Ng (1993)

é definido por

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (\epsilon_{t-i} + \gamma \sigma_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^q \beta \sigma_{t-j}^2. \quad (2.17)$$

Uma das formas de avaliar a adequação de um modelo é observar se este capta e explica os factos estilizados mais comuns nas séries a serem modeladas (Malmsten e Teräsvirta, 2004). Bollerslev *et al.* (1994) destacam que o modelo GARCH com erros normalmente distribuídos não parece incorporar algumas propriedades empíricas dos dados. Tendo em conta as caudas pesadas nas séries temporais financeiras, pode ser apropriado utilizar distribuições com caudas mais pesadas que a distribuição Normal. Para ajustar os modelos GARCH, escolhas mais populares na literatura financeira são: a distribuição *t-Student*, a distribuição exponencial dupla ou a distribuição do erro generalizada (GED) (Wang e Sloan, 2011; Zivot, 2009). Cont (2001) também faz referência à distribuição Normal Inversa e a distribuições hiperbólicas generalizadas.

Para incorporar melhor as características empíricas observadas nos dados, surgiram na última década alguns artigos onde não é assumida *a priori* uma distribuição para as inovações. Nestes modelos não paramétricos, a distribuição é captada na distribuição empírica dos dados. Nesta linha de investigação encontra-se o artigo de Barone-Adesi *et al.* (2008).

No sentido de reproduzir com sucesso as propriedades das distribuições marginais dos retornos, de acordo com Cont (2001) um modelo paramétrico deve ter, no mínimo, quatro parâmetros: parâmetro de localização, parâmetro de volatilidade, parâmetro de assimetria e um parâmetro de decaimento de cauda. Cont (2001) define o índice de cauda, k , como sendo a ordem mais elevada do momento absoluto que é finito. O índice de cauda de uma distribuição mede o peso da cauda, a um valor alto de k corresponde uma cauda leve. Para uma cauda Gaussiana ou exponencial, $k = +\infty$ (todos os momentos são finitos).

2.4 Avaliação de opções

A determinação do preço de um contrato de opções tem sido objeto de modelação matemática ao longo do tempo. Existem essencialmente duas abordagens para o cálculo

do preço de uma opção. Numa, o preço é calculado resolvendo uma equação linear parabólica em derivadas parciais e na outra, conhecida por abordagem martingala ou risco neutral, o valor da opção é o valor esperado do seu *payoff* descontado à taxa de juro sem risco. A ligação entre as duas abordagens pode ser feita através do teorema de *Feynman-Kac*, que estabelece que a solução de uma equação linear parabólica em derivadas parciais tem uma representação em termos de um valor esperado (Heath e Schweizer, 2000; Neftci, 2000). Qualquer das abordagens assenta nos chamados "Teoremas Fundamentais das Finanças". O primeiro teorema determina que *um mercado é livre de arbitragem se e só se existe uma medida martingala equivalente* e o segundo, garante a unicidade dessa medida se, além de livre de arbitragem, o mercado também for completo (Mitra, 2009).

O primeiro modelo de grande impacto na literatura sobre a avaliação de opções foi o modelo de Black e Scholes (1973). Neste importante trabalho foi deduzida uma solução analítica para a opção de compra europeia. No entanto, suposições que serviram de base ao estabelecimento do modelo, como a lognormalidade e a volatilidade constante, têm sido postas em causa devido à observação de certas regularidades empíricas encontradas nas séries dos retornos de diversos ativos financeiros, como a leptocurtose ou a presença de *clusters* na volatilidade.

Na literatura sobressaem essencialmente dois tipos de modelos para a volatilidade: modelos contínuos de volatilidade estocástica e modelos discretos autorregressivos de heterocedasticidade condicional (ARCH) e ARCH generalizados (GARCH) e suas extensões.

Muitas das aplicações empíricas atuais dos modelos GARCH na avaliação de opções, têm-se limitado a opções europeias ou opções de compra Americanas que não pagam dividendos e por isso, podem ser consideradas basicamente como de estilo europeu (Stentoft, 2005). Com exceção da formulação particular de Heston e Nandi (2000), que desenvolveram uma expressão analítica para opções europeias no âmbito dos modelos GARCH, geralmente não é possível obter uma fórmula fechada para o preço da opção neste contexto, havendo necessidade de recorrer a métodos numéricos.

Muito embora a maior parte das opções transacionadas nos mercados sejam de estilo americano, a grande maioria da investigação sobre a avaliação de opções debruça-se sobre as opções de estilo europeu. Isto deve-se ao facto de as opções de estilo americano apresentarem uma dificuldade acrescida simultaneamente ao cálculo do seu valor, que é a necessidade de determinar uma estratégia ótima ao seu exercício antecipado.

Face à inexistência de soluções analíticas, abordagens baseadas em métodos numéricos têm sido utilizadas para avaliar este tipo de opções. Os métodos de árvores binomiais e os métodos de malha (*lattice*) são frequentemente aplicados. No entanto, a complexidade computacional destes métodos cresce exponencialmente com o número de variáveis, sendo este problema referido na literatura como *curse of dimensionality* (Boyle *et al.*, 1997).

Os métodos de simulação geralmente não sofrem deste problema já que a complexidade computacional cresce apenas linearmente com o número de fatores estocásticos. São métodos bastante flexíveis já que podem incorporar diversos processos estocásticos, múltiplos ativos e podem ser aplicados em situações muito diversas, como é o caso das opções com dependência da trajetória.

Inicialmente usados apenas para opções Europeias, acreditava-se que os métodos de simulação não poderiam ser aplicados no caso das opções Americanas. Tilley (1993), Barraquand e Martineau (1995) e Carriere (1996) realizaram as primeiras aplicações destes métodos no âmbito destas opções. Diversas investigações mostraram que metodologias baseadas em técnicas de simulação podem ser usadas com sucesso neste tipo de opções (Duan e Simonato, 2001; Longstaff e Schwartz, 2001; Ritchken e Trevor, 1999; Stentoft, 2005; Tsitsiklis e Van Roy, 2001), mas foi o método *Least Squares Monte Carlo* (LSMC) proposto por Longstaff e Schwartz (2001) que veio estabelecer claramente a aplicabilidade destas técnicas a opções Americanas. Este método tem sido analisado detalhadamente por vários autores (Areal *et al.*, 2008; Jonen, 2009; Moreno e Navas, 2003; Stentoft, 2004a) que têm evidenciado a sua grande flexibilidade em aplicações diversas, sendo hoje em dia amplamente utilizado.

O método LSMC usa regressão para estimar o valor de continuação (valor da opção supondo que esta se mantém ativa) e começa por deduzir uma estratégia de exercício ótimo que vai ser aplicada de seguida ao conjunto de caminhos simulados para o subjacente.

Stentoft (2013) mostrou que os métodos de regressão possuem claras vantagens sobre outros métodos de simulação em termos de eficiência computacional e propriedades assintóticas. Em Stentoft (2008b) pode verificar-se a superioridade de LSMC sobre outros métodos que usam simulação e regressão na avaliação de opções Americanas. Stentoft (2004b) provou que este método possui boas propriedades de convergência e que o algoritmo LSMC converge para o verdadeiro valor da opção quando o número de caminhos e de regressores tendem para $+\infty$.

Stentoft (2005) investigou o modelo NGARCH com inovações normais tendo obtido preços muito próximos dos obtidos por Duan e Simonato (2001) e Ritchken e Trevor (1999).

A base teórica para avaliação de opções em modelos GARCH com inovações não normais foi estabelecida por Duan (1999). Este autor, estendeu o modelo de avaliação de opções a distribuições leptocúrticas. Em particular, a distribuição escolhida foi a distribuição do erro generalizada (*generalized error distribution*, GED). Os resultados do estudo mostraram que a leptocurtose condicional desempenha um papel importante na determinação dos preços de opções. Estas conclusões são confirmadas em Hafner e Herwartz (2001), que utilizam a distribuição *t-Student* no âmbito dos modelos GARCH obtendo resultados semelhantes.

Usando a mesma abordagem que Stentoft (2005), mas incorporando assimetria e curtose condicionais, Stentoft (2008a) usou inovações de uma distribuição Normal Inversa, *Normal Inverse Gaussian* (NIG). A mesma distribuição foi escolhida por Christoffersen *et al.* (2006) que também assinalam a importância de modelar a assimetria condicional. Como refere Stentoft (2008b) as aplicações empíricas de tais modelos são ainda muito limitadas, provavelmente devido à complexidade de implementação neste contexto.

3. Métodos Monte Carlo

Muitos dos problemas que surgem na área das finanças envolvem o cálculo dos valores esperados que podem ser expressos como integrais de dimensão elevada. Estes integrais são normalmente complicados e não podem ser calculados analiticamente. Consequentemente, os métodos Monte Carlo (MC) tornaram-se uma ferramenta numérica útil para encontrar soluções aproximadas para estes problemas. Segundo [Niederreiter \(1992\)](#), o uso do plural deve-se ao facto de poder ser aplicado a uma grande variedade de problemas, e não exclusivamente a problemas de integração numérica.

O uso do método Monte Carlo no cálculo dos valores esperados de dimensão elevada surgiu nos anos 40 com o desenvolvimento dos computadores programáveis ([Jäckel e Bubley, 2002](#); [Metropolis, 1987](#)). A expressão “Método Monte Carlo” foi utilizada pela primeira vez na área da Física no artigo de [Metropolis e Ulam \(1949\)](#). Em Finanças, o método Monte Carlo foi introduzido por [Boyle \(1977\)](#) aplicado na avaliação de opções. Desde então muita investigação tem sido desenvolvida nesta área (para trabalhos recentes consultar ([Dick *et al.*, 2013b](#); [Glasserman, 2004](#); [Jäckel e Bubley, 2002](#); [Kroese *et al.*, 2013](#); [Larcher e Leobacher, 2005](#); [Lemieux, 2009](#); [McLeish, 2011](#))).

No entanto, este método necessita de um grande número de simulações para obter uma dada precisão e por isso, o tempo de computação pode tornar-se demasiado elevado.

Surgiram então modificações do modelo de simulação base de modo a aumentar a sua eficiência. O desafio é obter uma dada precisão com um menor número de simulações. Este melhoramento pode ser conseguido de duas maneiras distintas. Na primeira, recorre-se a diferentes processos de amostragem, usando pontos deterministicamente construídos para obter uma melhor uniformidade do espaço amostral e assim aumentar a convergência do método Monte Carlo. Estes métodos são conhecidos como métodos Quasi-Monte Carlo (QMC) ou métodos de baixa discrepância. Uma outra forma de aumentar a eficiência computacional do método é reduzindo a variância dos estimado-

res recorrendo a técnicas de redução da variância.

Neste capítulo descreveremos o método Monte Carlo básico, assim como o método Quasi-Monte Carlo. Abordaremos ainda algumas técnicas de redução da variância habitualmente usadas em estudos financeiros.

3.1 Método Monte Carlo básico

O Método Monte Carlo pode ser utilizado num contexto de simulação estocástica, no estudo das propriedades dos estimadores em sistemas que possuem componentes estocásticas ou em problemas onde estão envolvidos cálculos de integrais multivariados com funções integrandas por vezes complicadas. No primeiro caso, a ideia é realizar simulações independentes das componentes estocásticas e calcular uma estimativa da quantidade de interesse a partir destas amostras independentes. Isto significa simular uma amostra de um vetor \mathbf{X} de variáveis aleatórias (*input*) para obter uma amostra a partir $Y = h(\mathbf{X})$ (*output*).

A integração Monte Carlo estima um integral da forma

$$I(f) = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

através de uma amostragem uniforme de $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ no domínio $D \subseteq \mathbb{R}^s$. Usualmente podemos realizar uma mudança de variáveis e transformar o problema de modo a que $D = [0, 1]^s$ e reescrevemos o integral como

$$I(f) = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (3.2)$$

e a amostra $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ onde \mathbf{u}_i são iid uniformes em $[0, 1]^s$.

A restrição do domínio ao hipercubo unitário não representa uma limitação, já que, na prática, a maioria dos integrais sobre regiões limitadas ou ilimitadas pode ser transformado num integral com esta forma através de adequadas mudanças de variáveis (consultar (Dick *et al.*, 2013a, p. 160) para convenientes transformações).

Estas duas formulações (simulação/integração) estão estreitamente relacionadas ((Lemieux, 2009) apresenta uma discussão aprofundada desta dupla interpretação). Apre-

sentamos no quadro seguinte as duas formulações, simulação MC versus integração MC.

	Simulação	Integração
Objetivo	Estimar $\mu = E[h(\mathbf{X})]$	Estimar $I(f) = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u})d\mathbf{u}$
Input	Amostra \mathbf{X}	Amostra \mathbf{u}
Output	Distribuição de $Y = h(\mathbf{X})$	Distribuição de $f(\mathbf{u}) = h(g(\mathbf{u})) = h(\mathbf{X})$

Tabela 3.1: Formulação Simulação *versus* Integração

Considerando as transformações

$$\begin{array}{ccccc} [0,1]^s & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^k & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{X} & \longrightarrow & Y = h(\mathbf{X}) = h(g(\mathbf{U})) = f(\mathbf{U}) \end{array}$$

podemos estabelecer o problema combinando as duas formulações e estimar o valor esperado μ

$$\mu = E[h(\mathbf{X})] = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u})d\mathbf{u} = E[f(\mathbf{U})]. \quad (3.3)$$

O integral $I(f) = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u})d\mathbf{u}$ pode ser aproximado através do estimador Monte Carlo

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{u}_i) \quad (3.4)$$

onde os pontos \mathbf{u}_i são iid uniformes em $[0,1]^s$.

Este estimador é não enviesado já que

$$E[I_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[f(\mathbf{u}_i)] = E[f(\mathbf{U})] = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u})d\mathbf{u} = I(f)$$

onde a terceira igualdade é justificada pelo facto da função densidade de probabilidade de \mathbf{U} no hipercubo unitário ser 1.

Segundo a lei forte dos grandes números, I_n converge quase certamente para $I(f)$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, se

$$\sigma^2 = \int_{[0,1]^s} (f(\mathbf{u}) - I(f))^2 d\mathbf{u}$$

é a variância de $f(\mathbf{U})$, o teorema do limite central assegura que o erro Monte Carlo, $I_n - I(f)$, é aproximadamente normal, de média 0 e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ou seja

$$I_n - I(f) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

A aproximação melhora com valores crescentes de n .

A demonstração do resultado seguinte sobre a variância do estimador I_n , pode ser encontrada em (Dick *et al.*, 2013a, p. 138).

Teorema 1 *Seja $f \in L_2([0, 1]^s)$. Então $\forall n \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$\text{Var}(I_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

σ é usualmente desconhecido mas pode ser estimado pelo desvio-padrão amostral

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(\mathbf{u}_i) - I_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e a variância pode ser estimada por

$$\text{Var}(I_n) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n}. \quad (3.5)$$

Assim, a partir dos valores de $f(\mathbf{u}_i)$ obtemos uma estimativa do integral $I(f)$, assim como uma medida do erro desta estimativa na ordem $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ que é independente da dimensão s . Por esta razão, o método Monte Carlo torna-se bastante competitivo quando comparado com outros métodos de quadratura. Por exemplo, o erro da aproximação quando se usam métodos baseados na regra do trapézio é da ordem $\mathcal{O}(n^{-2/s})$. Para garantir uma certa precisão, digamos um erro absoluto menor ou igual a 10^{-2} , precisamos de usar cerca de 10^8 pontos. Concluimos assim que, neste caso, o número de pontos necessários para garantir a aproximação requerida aumenta exponencialmente com a dimensão s . Este fenómeno é habitualmente referido na literatura como *curse of dimensionality* (maldição da dimensão). Esta expressão deve-se a Richard Ernest Bellman que a utilizou pela primeira vez em 1957.

Dick *et al.* (2013a) e Leobacher e Pillichshammer (2014) referem as principais vantagens do método Monte Carlo:

- (i) é aplicável a diversos tipos de funções, sob certas condições de regularidade (basta que sejam f^2 –integráveis)
- (ii) a taxa de convergência de ordem $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ é independente da dimensão s
- (iii) é fácil de obter uma estimativa do erro.

O método MC fornece um limite probabilístico para o erro na ordem $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ que não depende da dimensão do problema. Embora esta característica faça com que este método seja atrativo para problemas de dimensão elevada, que tipicamente surgem no ramo financeiro, o método MC é frequentemente considerado muito lento, uma vez que é necessário realizar um grande número de simulações para obter a precisão pretendida. Por exemplo, para aumentar a precisão 10 vezes teremos que aumentar o número de simulações 100 vezes. Por isso, o tempo de computação pode tornar-se demasiado elevado.

Niederreiter (2012) e Leobacher e Pillichshammer (2014) sintetizam as principais desvantagens do método Monte Carlo:

- (i) o erro obtido pode apenas ser enquadrado probabilisticamente, isto é, não existe garantia de obter uma dada precisão
- (ii) para algumas aplicações o método converge lentamente
- (iii) a taxa de convergência $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ não reflete possíveis regularidades da função integranda
- (iv) a geração de amostras aleatórias independentes é difícil.

3.2 Método Quasi-Monte Carlo

Como foi referido na secção anterior, o método Monte Carlo é bastante utilizado em problemas multidimensionais de integração numérica. Trata-se de aproximar o integral

$$I(f) = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.6)$$

sendo f uma função f^2 –integrável e $D = [0, 1]^s$ o hipercubo unitário.

Para aproximar $I(f)$ é escolhido um conjunto de pontos $P_n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset [0, 1]^s$ e é

calculada a média

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i). \quad (3.7)$$

No método Monte Carlo os pontos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ são independentes e uniformemente distribuídos em $[0, 1]^s$. Na prática, usam-se geradores de números pseudo-aleatórios. As características destes números permitem aglomeração de pontos: algumas áreas vazias assim como regiões onde os pontos aleatórios estão próximos uns dos outros (figura 3.1). Adicionando novos pontos aleatoriamente não vai preencher necessariamente os espaços entre os pontos já amostrados. O espaço amostral não fica assim bem preenchido.

Surgiram então modificações do modelo de simulação base de modo a aumentar a sua eficiência. O desafio é obter uma dada precisão com um menor número de simulações. Métodos alternativos de amostragem usam pontos deterministicamente construídos para dar uma uniformidade melhor do que uma sequência aleatória e, portanto, aumentar a convergência do método Monte Carlo. Estes métodos são conhecidos como métodos Quasi-Monte Carlo (QMC) ou métodos de baixa discrepância.

Na figura seguinte pode observar-se a diferente cobertura do espaço dada por uma sequência de números pseudo-aleatórios e por uma sequência determinística.

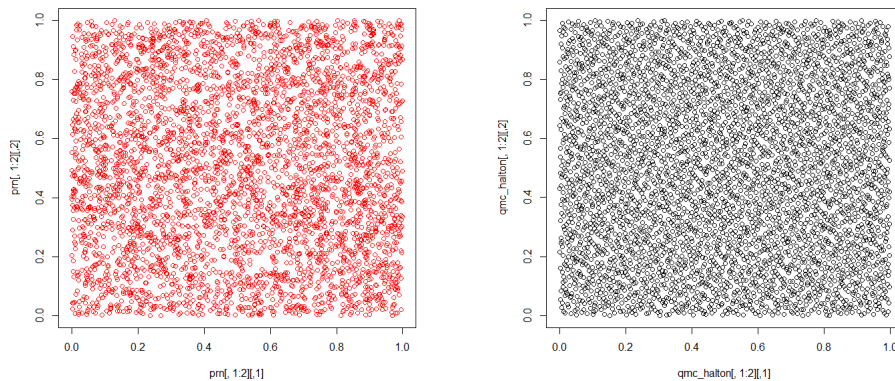


Figura 3.1: Sequência de números pseudo-aleatórios (esq) e sequência de números determinísticos (dir)

Os métodos QMC usam pontos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ mais regularmente distribuídos em $[0, 1]^s$,

construídos de forma determinística de modo a conseguir uma melhor amostragem do domínio, e consequentemente, uma melhor aproximação do integral $\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Esta amostragem é muitas vezes designada por *amostragem de baixa discrepância* porque usa amostras cuja distribuição aproxima a distribuição uniforme *tanto quanto possível*. Podem encontrar-se diversas construções para estas amostras. Para que possam ser comparadas e garantam uma maior eficiência, existem diversas medidas da sua uniformidade que se designam por *discrepâncias*.

Estes métodos permitem melhorar a taxa de convergência do método MC, obtendo-se taxas de convergência, em alguns casos, superiores a $\mathcal{O}((\log n)^s/n)$ (Dick *et al.*, 2013a). No entanto, o método QMC apresenta uma desvantagem em relação ao método MC. Embora, em geral forneça melhores aproximações, ele dá-nos uma única estimativa de (3.6), cujo erro é limitado, e menor que o erro MC, mas não permite calcular uma medida do erro dessa estimativa. Para ultrapassar esta desvantagem, diversos autores propuseram versões randomizadas do método QMC (L'Ecuyer e Lemieux, 2005; Ökten e Eastman, 2004; Tan e Boyle, 2000).

Durante muito tempo acreditou-se que os métodos QMC não eram adequados para problemas de dimensão elevada. No entanto evidências empíricas contrariavam esta ideia (Caffisch *et al.*, 1997; Paskov, 1996; Paskov e Traub, 1995). Hoje sabe-se que estes métodos proporcionam bons resultados em muitos problemas da área das Finanças porque estes problemas têm uma *dimensão efetiva* baixa. O conceito de *dimensão efetiva*, introduzido por Paskov (1996), redefinido por Caffisch *et al.* (1997) e relacionado com a decomposição ANOVA, teve um papel importante na explicação do sucesso dos métodos QMC em problemas de dimensão elevada, como explica Lemieux e L'Ecuyer (2001).

3.2.1 Conceitos e propriedades

A ideia base do método Quasi-Monte Carlo é substituir a amostragem aleatória (pseudo-aleatória) do método Monte Carlo por uma amostragem determinística em que os pontos são uniformemente distribuídos. Niederreiter (1992) apresenta o método Quasi-Monte Carlo detalhadamente e descreve diversas maneiras de medir a “qualidade” do conjunto de pontos usados $P_n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n : \mathbf{x}_i \in [0, 1]^s\}$, isto é, medidas da diferença entre a distribuição empírica induzida por P_n e a distribuição uniforme em $[0, 1]^s$. Estas medidas são chamadas “discrepâncias”. A discrepância pode, assim, ser vista como

uma medida quantitativa do desvio em relação à distribuição uniforme e é uma noção essencial na teoria dos métodos Quasi-Monte Carlo. Vários tipos de discrepância podem encontrar-se em diversas aplicações, em múltiplas áreas.

As medidas de discrepância são importantes pois permitem majorar o erro de integração $|I(f) - I_n|$. Pontos com menor discrepância garantem menor erro na aproximação QMC. O estabelecimento de limites para este erro e a necessidade de construções de conjuntos de pontos e sequências de baixa discrepância que garantam uma melhor taxa de convergência, é uma área de investigação que tem sofrido fortes desenvolvimentos nos últimos anos.

A teoria sobre o método Quasi-Monte Carlo faz a distinção entre sequências infinitas de pontos e conjuntos finitos de pontos (*nets*) e define *discrepância de uma sequência* como sendo a discrepância dos seus n primeiros elementos.

Glasserman (2004) apresenta a discrepância do conjunto de pontos $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ relativamente a \mathcal{A} (coleção de subconjuntos mensuráveis de $[0, 1]^s$) de uma forma intuitiva, como sendo

$$D(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathcal{A}) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\#\{\mathbf{x}_i \in A\}}{n} - \text{Vol}(A) \right| \quad (3.8)$$

onde $\#\{\mathbf{x}_i \in A\}$ representa o número de pontos \mathbf{x}_i que pertencem a A e $\text{Vol}(A)$ representa o volume (medida) de A .

Para uma abordagem mais rigorosa, como em Niederreiter (1992), considere-se um subconjunto arbitrário B de $[0, 1]^s$. Define-se

$$A(B; P) = \sum_{i=1}^n c_B(\mathbf{x}_i)$$

sendo $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ e c_B a função característica (ou indicatriz) de B . Assim, $A(B; P)$ é uma função de contagem que indica o número de índices i ($1 \leq i \leq n$) para os quais x_i pertence a B . Se \mathcal{B} é uma família não vazia de subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de $[0, 1]^s$, podemos apresentar a seguinte definição geral de discrepância.

Definição 1

Discrepância do conjunto P é dada por

$$D_n(\mathcal{B}; P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \frac{A(B; P)}{n} - \lambda_d(B) \right| \quad (3.9)$$

onde $\lambda_d(B)$ é a medida Lebesgue (volume) de B .

Dependendo da família \mathcal{B} considerada, podemos obter diferentes conceitos de discrepância. Geralmente consideram-se intervalos da forma $[\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \prod_{j=1}^s [u_j, v_j)$, com $0 \leq u_j < v_j \leq 1$, em que $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_s)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_s)$ são elementos de $[0, 1]^s$. Para uma sequência $S = \{(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ em $[0, 1]^s$ e um intervalo $[\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subseteq [0, 1]^s$ tem-se

$$A([\mathbf{u}, \mathbf{v}); S) = \# \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \text{ e } x_i \in [\mathbf{u}, \mathbf{v})\}$$

e a medida Lebesgue s -dimensional do intervalo $[\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é dada por $\lambda_s([\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \prod_{j=1}^s (v_j - u_j)$.

Definição 2

Uma sequência $S = \{(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ em $[0, 1]^s$ diz-se **uniformemente distribuída modulo um** (ou **equidistribuída**), se para qualquer intervalo da forma $[\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subseteq [0, 1]^s$ se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A([\mathbf{u}, \mathbf{v}); S)}{n} = \lambda_s([\mathbf{u}, \mathbf{v})). \quad (3.10)$$

Usando a função indicatriz podemos escrever

$$A([\mathbf{u}, \mathbf{v}); S) = \sum_{i=1}^n c_{[\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{x}_i)$$

e então (3.10) é equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_{[\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{x}_i) = \int_{[0, 1]^s} c_{[\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.11)$$

Esta relação leva-nos ao teorema seguinte que faz a ligação com a integração QMC e cuja prova pode ser encontrada em [Leobacher e Pillichshammer \(2014\)](#).

Teorema 2

Uma sequência $S = \{(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ em $[0, 1]^s$ é equidistribuída se e só se, para qualquer função Riemann-integrável $f : [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Assim, uma sequência deve ser uniformemente distribuída módulo um para obtermos uma boa aproximação QMC do integral (3.6) usando os n primeiros pontos dessa sequência. No entanto, na prática, só podemos trabalhar com conjuntos finitos de pontos, que nunca poderão ser uniformemente distribuídos módulo um. O teorema 2 sugere que se devem usar pontos cuja distribuição empírica é próxima da distribuição uniforme módulo um.

De seguida introduzimos diversas medidas que permitem quantificar o desvio de um conjunto finito de pontos em relação à distribuição uniforme. Como já referimos, estas medidas são habitualmente chamadas *discrepâncias*.

Definição 3

Seja $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset [0, 1]^s$. A **discrepância extrema** D_n do conjunto de pontos P é definida por

$$D_n(P) = \sup_{\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0,1]^s} \left| \frac{A([\mathbf{u}, \mathbf{v}]; P)}{n} - \lambda_s([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) \right|. \quad (3.13)$$

Definição 4

Seja $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset [0, 1]^s$. A **discrepância asterisco** D_n^* do conjunto de pontos P é definida por

$$D_n^*(P) = \sup_{\mathbf{v} \in [0,1]^s} \left| \frac{A([\mathbf{0}, \mathbf{v}]; P)}{n} - \lambda_s([\mathbf{0}, \mathbf{v}]) \right|. \quad (3.14)$$

O teorema seguinte é um resultado clássico que majora o erro $|I(f) - I_n|$ pelo produto de dois termos, a variação da função integranda e a discrepância asterisco dos pontos considerados. Foi provado por J. F. Koksma em 1942 para o caso unidimensional e mais tarde, em 1961, generalizado para uma qualquer dimensão $s \in \mathbb{N}$.

Teorema 3 (*Desigualdade de Koksma-Hlawka*)

Para qualquer função f , de variação¹ $V(f)$ limitada no sentido de Hardy e Krause e quaisquer pontos $\mathbf{x}_1 \cdots, \mathbf{x}_n \in [0, 1]^s$, tem-se

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) \right| \leq V(f) D_n^*.$$

A relação entre as duas medidas, $D_n(P)$ e $D_n^*(P)$, é estabelecida na proposição seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [Dick e Pillichshammer \(2010\)](#).

Proposição 1

Para qualquer conjunto P de n pontos de $[0, 1]^s$, verifica-se

$$D_n^*(P) \leq D_n(P) \leq 2^s D_n^*(P). \quad (3.15)$$

Com base nas noções de discrepâncias, podemos estabelecer o critério seguinte para a uniformidade módulo um de uma sequência².

Teorema 4

Seja S uma sequência com elementos em $[0, 1]^s$. As seguintes afirmações são equivalentes

(a) S é uniformemente distribuída modulo um

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(S) = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(S) = 0$.

Considerando a função *discrepância*, também chamada *discrepância local*,

$$\Delta_{P,n} : [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\Delta_{P,n}(\mathbf{y}) = \frac{A([0, \mathbf{y}]; P)}{n} - \lambda_s([0, \mathbf{y}]), \quad (3.16)$$

¹Para uma definição precisa de $V(f)$ e vários outros tipos de discrepância usados em domínios de integração mais gerais do que $[0, 1]^s$, consultar [Niederreiter \(1992\)](#).

²Recorde-se que a discrepância de uma sequência infinita é a discrepância dos seus n primeiros elementos.

a discrepância asterisco de um conjunto P de pontos, também pode ser definida como a norma infinita de $\Delta_{P,n}$. Ou seja,

$$D_n^*(P) = \|\Delta_{P,n}\|_{L_\infty}. \quad (3.17)$$

Sob este ponto de vista, poderemos considerar outras normas L_p ($p \geq 1$) da função discrepância.

Definição 5

Seja $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset [0, 1]^s$ e seja $p \in [1, \infty)$. A **discrepância L_p** de P é definida por

$$L_{p,n}(P) = \|\Delta_{P,n}\|_{L_p} = \left(\int_{[0,1]^s} \left| \frac{A([\mathbf{0}, \mathbf{y}); P]}{n} - \lambda_s([\mathbf{0}, \mathbf{y}]) \right|^p d\mathbf{y} \right)^{1/p}. \quad (3.18)$$

Pela monotonia da norma L_p , se $p_1 \leq p_2$ então $L_{p_1,n} \leq L_{p_2,n}$. Podemos assim estabelecer uma relação entre as discrepâncias asterisco e L_p na proposição seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [Drmota et al. \(1997\)](#).

Proposição 2

Para qualquer conjunto P de n pontos de $[0, 1]^s$, verifica-se

$$L_{p,n}(P) \leq D_n^*(P) \leq c_{s,p} L_{p,n}^{\frac{p}{p+s}}(P) \quad (3.19)$$

sendo a constante positiva $c_{s,p}$ apenas dependente de s e p mas não de n .

Como consequência deste resultado, obtemos um novo critério de uniformidade módulo um para uma sequência.

Corolário 1

Seja $p \in [1, \infty)$. Uma sequência $S = \{(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ em $[0, 1]^s$ é uniformemente distribuída módulo um se e só se $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{p,n}(S) = 0$.

Outro resultado clássico, estabelecido por K. F. Roth em 1954 é o teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [Dick e Pillichshammer \(2010\)](#).

Teorema 5 (*Roth*)

Para qualquer dimensão $s \in \mathbb{N}$, existe uma constante $c_s > 0$ tal que, para qualquer

conjunto P de pontos de $[0, 1)^s$ se tem,

$$D_n(P) \geq D_n^*(P) \geq L_{2,n}(P) \geq c_s \frac{(\log n)^{\frac{s-1}{2}}}{n}. \quad (3.20)$$

Uma vez que a norma L_p é monótona crescente, o limite inferior de teorema de Roth também se verifica para qualquer L_p , com $p \geq 2$. Foi provado por W. M. Schmidt em 1977 que a relação continua válida para valores de $p \in]1, 2[$. Assim, tem-se que para qualquer $1 < p < \infty$ e qualquer dimensão s , existe $c_{s,p} > 0$ tal que, para qualquer conjunto de n pontos do hipercubo unitário, se tem

$$L_{p,n}(P) \geq c_{s,p} \frac{(\log n)^{\frac{s-1}{2}}}{n}. \quad (3.21)$$

Hoje sabe-se que a ordem $\mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{\frac{s-1}{2}}}{n}\right)$ obtida em (3.21) é a melhor possível (Dick e Pillichshammer, 2010). Além disso, para qualquer $p > 1$, qualquer $s \in \mathbb{N}$ e qualquer $n \geq 2$, existe uma construção específica de pontos que verifica

$$L_{p,n}(P) \leq \tilde{c}_{s,p} \frac{(\log n)^{\frac{s-1}{2}}}{n}. \quad (3.22)$$

O teorema 3 permite-nos concluir que conjuntos de pontos $\mathbf{x}_1 \dots, \mathbf{x}_n \in [0, 1)^s$ com menor discrepância D_n^* garantem menores erros na integração Quasi-Monte Carlo em $[0, 1)^s$. Poderemos questionar qual a D_n^* mínima que é possível obter para um determinado n e s . Neste caso, a situação é um pouco diferente, já que se conhecem resultados para $s = 2$,

$$D_n^*(P) \geq c \frac{\log n}{n} \quad (3.23)$$

e para $s \geq 3$,

$$D_n^*(P) \geq c_s \frac{(\log n)^{\frac{s-1}{2} + \eta_s}}{n} \quad (3.24)$$

sendo $0 < \eta_s < \frac{1}{2}$ (Dick e Pillichshammer, 2010).

Atualmente, este é o melhor resultado que se conhece para $s \geq 3$ (Leobacher e Pillichshammer, 2014). Sabe-se que para $s = 2$, a ordem $\mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n}\right)$ em (3.23) é a melhor possível, mas a ordem assintótica exata para $s \geq 3$ é ainda um problema em aberto,

não existindo consenso quanto ao expoente a considerar, muito embora se conheçam construções de n elementos com D_n^* na ordem $\mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{s-1}}{n}\right)$.

(Niederreiter, 2012) afirma que para $n \geq 2$ e $s \geq 1$, a menor ordem de magnitude que é possível obter é

$$D_n^*(P) = \mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{s-1}}{n}\right). \quad (3.25)$$

Esta conjectura foi provada para $s = 1$ e $s = 2$.

Um conjunto de pontos que verifica (3.25) é chamado um conjunto de **pontos de baixa discrepância** (*low discrepancy points*).

Para sequências infinitas, Leobacher e Pillichshammer (2014) demonstram o seguinte teorema:

Teorema 6

Para qualquer dimensão $s \in \mathbb{N}$, existe uma constante $c'_s > 0$ tal que, para qualquer sequência S de pontos de $[0, 1]^s$ e para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$, se tem

$$D_n^*(S) \geq c'_s \frac{(\log n)^{\frac{s}{2}}}{n}. \quad (3.26)$$

No caso da dimensão $s = 1$, W. M. Schmidt em 1972 provou o seguinte resultado:

Teorema 7 (Schmidt)

Existe uma constante $c > 0$ tal que para qualquer sequência S de pontos de $[0, 1]$ e para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$, se tem

$$D_n^*(S) \geq c \frac{(\log n)}{n}. \quad (3.27)$$

Foi demonstrado que, para $s = 1$, a ordem $\mathcal{O}\left(\frac{(\log n)}{n}\right)$ é a melhor possível. Para $s \geq 2$ existe apenas a conjectura de que a melhor ordem possível é

$$D_n^*(S) = \mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^s}{n}\right) \quad (3.28)$$

Uma sequência infinita de pontos que verifica 3.28, diz-se uma **sequência de baixa discrepância** (*low discrepancy sequence*, abreviadamente LDS).

3.2.2 Principais construções de baixa discrepância

A teoria sobre o método Quasi-Monte Carlo faz a distinção entre sequências infinitas de pontos e conjuntos finitos de pontos. É mais simples construir um conjunto de pontos com discrepância D_n^* baixa do que construir uma sequência (infinita) em que os primeiros n pontos mantêm a baixa dispersão quando n varia (Ökten e Eastman, 2004).

Podem considerar-se dois tipos de métodos Quasi-Monte Carlo:

- métodos de tipo “aberto” - usam os primeiros n pontos de uma sequência infinita. Se pretendermos aumentar o valor de n só precisamos de calcular o valor da função integranda nos novos pontos
- métodos de tipo “fechado” - usam um conjunto finito de n pontos. Para novos valores de n é necessário gerar um conjunto de pontos completamente novo.

A definição seguinte é essencial para o desenvolvimento de conceitos sobre estes métodos.

Definição 6 (*Função radical inversa*)

Para os inteiros $i \geq 0$ e $b \geq 2$, define-se a função radical inversa $\phi_b(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i_j}{b^j}$, sendo $i = \sum_{j=1}^{\infty} i_j b^{j-1}$ e $i_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$.

Ou seja, se $i = (\dots i_2 i_1)_b$ é a representação de i na base b , então $\phi_b(i) = (0.i_1 i_2 \dots)_b$. Esta definição será ilustrada no exemplo que se segue.

Exemplo 1 (*Sequência de van der Corput*)

A sequência de van der Corput na base b é a sequência unidimensional

$$\phi_b(0), \phi_b(1), \phi_b(2), \dots$$

No caso de $b = 2$, escrevemos os inteiros $0, 1, 2, \dots$ nesta base

$$0, 1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, \dots$$

aplicamos a função radical inversa ϕ_2 a cada número, obtendo-se a sequência

$$0, 0.1_2, 0.01_2, 0.11_2, 0.001_2, 0.101_2, 0.011_2, \dots,$$

que na forma decimal é representada por

$$0, 0.5, 0.25, 0.75, 0.125, 0.625, 0.375, \dots$$

Podemos resumir esta informação na tabela seguinte.

i	Base 2	$\phi_2(i)$ base 2	$\phi_2(i)$
0	0	0	0
1	1	0.1	$\frac{1}{2} = 0.5$
2	10	0.01	$\frac{1}{4} = 0.25$
3	11	0.11	$\frac{3}{4} = 0.75$
4	100	0.001	$\frac{1}{8} = 0.125$
5	101	0.101	$\frac{5}{8} = 0.625$
6	110	0.011	$\frac{3}{8} = 0.375$

Tabela 3.2: Primeiros elementos da sequência de *van der Corput* na base 2

Diversos métodos para gerar sequências de baixa discrepância foram propostos por [Halton \(1960\)](#), [Sobol \(1967\)](#), [Faure \(1982\)](#) e [Niederreiter \(1988\)](#), entre outros.

A sequência de *Halton* representa uma generalização multidimensional das sequências de *van der Corput*. Estas sequências são geradas usando para base um número primo diferente para cada dimensão. Assim, para $s = 1$ a base é igual ao primeiro número primo, $b = 2$ (sequência de *Van der Corput* na base $b = 2$, é também a primeira dimensão da sequência de *Halton*), para $s = 2$ a base é igual ao segundo número primo, $b = 3$, para $s = 3$ a base é igual ao terceiro número primo, $b = 5$ e assim sucessivamente, para a dimensão $s = n$ é usado o n -ésimo número primo. Por exemplo, se $s = 28$, a base considerada será igual ao vigésimo oitavo número primo $b = 107$.

Definição 7 (*Sequência de Halton*) Sejam p_1, p_2, \dots, p_s os primeiros s números primos. A sequência de Halton $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \dots$ de dimensão s é dada por

$$\mathbf{t}_i = (\phi_{p_1}(i), \phi_{p_2}(i), \dots, \phi_{p_s}(i)), \quad i = 0, 1, \dots$$

A sequência de Halton origina um método QMC de tipo “aberto”. Explicitamente, a sequência de Halton é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 &= (0, 0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{t}_1 &= (0.1_2, 0.1_3, 0.1_5, \dots, 0.1_{p_s}) \\ \mathbf{t}_2 &= (0.01_2, 0.2_3, 0.2_5, \dots, 0.2_{p_s}) \\ \mathbf{t}_3 &= (0.11_2, 0.01_3, 0.3_5, \dots, 0.3_{p_s}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

A taxa de convergência do método QMC com a sequência de Halton é $\mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^s}{n}\right)$. Para um valor fixo de s , a função $\frac{(\log n)^s}{n}$ é crescente para valores crescentes de n , $\forall n < e^s$ (Dick *et al.*, 2013a). Assim, o método QMC só permitirá aumentar a taxa de convergência do método MC se o número de pontos considerado for superior a e^s . Na figura seguinte pode observar-se os gráficos de $y(n) = \frac{(\log n)^s}{n}$ para $s = 10, 130, 270$. A linha vermelha situa o valor de $n = e^{10}$. Os valores correspondentes às dimensões $s = 130$ e $s = 270$ são, respetivamente, $e^{130} = 2.87265 \times 10^{56}$ e $e^{270} = 1.817649 \times 10^{117}$.

Definição 8 (*Conjunto de pontos de Hammersley*)

Sejam p_1, p_2, \dots, p_{s-1} os primeiros $s - 1$ números primos. O conjunto de pontos de Hammersley $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n-1}$ de dimensão s é dado por

$$\mathbf{t}_i = \left(\frac{i}{n}, \phi_{p_1}(i), \phi_{p_2}(i), \dots, \phi_{p_{s-1}}(i) \right), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

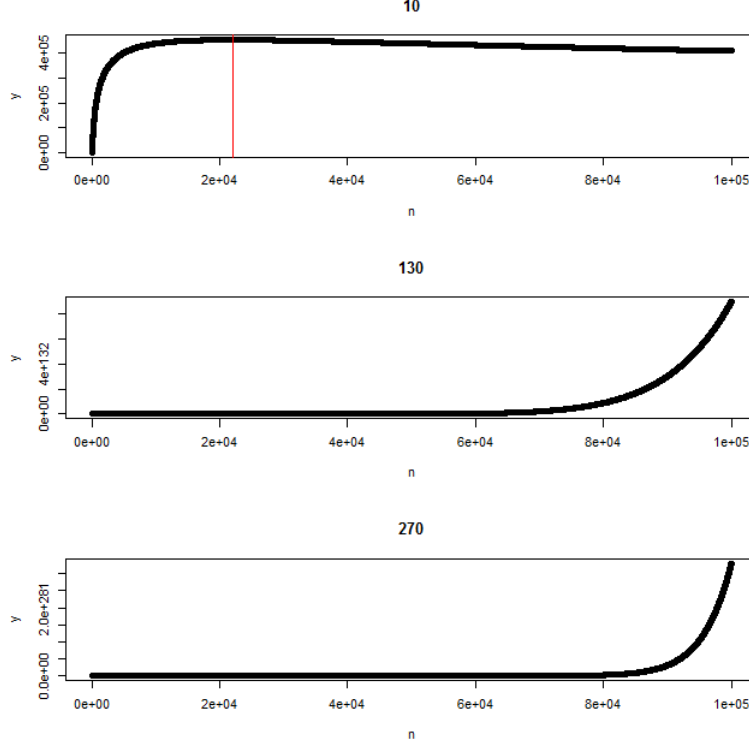


Figura 3.2: Efeito da dimensão nas sequências de Halton para $s = 10, 130, 270$.

O conjunto de pontos de *Hammersley* origina um método QMC de tipo “fechado”. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_0 &= (0, 0, 0, \dots, 0) \\
 \mathbf{t}_1 &= \left(\frac{1}{n}, 0.1_2, 0.1_3, 0.1_5, \dots, 0.1_{p_{s-1}} \right) \\
 \mathbf{t}_2 &= \left(\frac{2}{n}, 0.01_2, 0.2_3, 0.2_5, \dots, 0.2_{p_{s-1}} \right) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{t}_{n-1} &= \left(\frac{n-1}{n}, \dots \right).
 \end{aligned}$$

O erro da aproximação QMC baseado neste conjunto de pontos, possui taxa de convergência $\mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{s-1}}{n}\right)$. Note-se que o expoente é menor que o expoente que surge no caso da sequência de *Halton*. Tipicamente os limites do erro dos métodos QMC baseados em conjuntos de pontos (QMC “fechado”) são melhores do que aqueles baseados em

sequências (QMC “aberto”).

Existem essencialmente dois tipos de construções para os conjuntos de pontos e sequências de baixa discrepância: malhas (*lattices*) e redes e sequências digitais (*digital nets/sequences*).

Malhas

Uma malha em \mathbb{R}^s é um subconjunto discreto de \mathbb{R}^s que é fechado para as operações adição e subtração. Uma regra *lattice* é uma regra de cubatura de pesos iguais, cujos pontos são os de uma malha que fazem parte do hipercubo unitário $[0, 1)^s$. Qualquer conjunto de pontos *lattice* inclui a origem $\mathbf{0}$. A projeção destes pontos em cada eixo ordenado produz pontos igualmente espaçados. Tal como um integral de uma dimensão é aproximado pela regra do retângulo, cada regra *lattice* pode ser escrita como uma soma múltipla onde estão presentes um ou mais vetores geradores. O número mínimo de vetores geradores necessário para gerar uma regra *lattice* designa-se por ordem da regra *lattice*. Esta ordem poderá ir de 1 até s . As regras *lattice* foram introduzidas por Korobov(1959) e inicialmente utilizadas em integrais de funções periódicas.

Definição 9 (conjunto de pontos *lattice*)

Seja $s, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^s$. O conjunto de pontos *lattice*, P_n , é definido por uma regra *lattice* da forma

$$L_s = \{v_1 \mathbf{w}_1 + \dots + v_s \mathbf{w}_s, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^s\}$$

onde os vetores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$ de \mathbb{R}^s (formam uma base) são linearmente independentes no conjunto dos números racionais e são tais que $\mathbb{Z}^s \subseteq L_s$. O conjunto de pontos *lattice* correspondente é

$$P_n = L_s \cap [0, 1)^s.$$

Ou seja, os pontos P_n são obtidos considerando todas as combinações lineares inteiras dos vetores que pertencem a $[0, 1)^s$.

Redes-(t,m,s) e sequências-(t,s)

Para a integração QMC, é útil a utilização de um método de obtenção de conjuntos de pontos distribuídos no cubo unitário $[0, 1)^s$. Um destes métodos é baseado em redes e sequências de pontos. A noção de rede (t,m,s) baseia-se na partição do cubo

unitário em intervalos e na colocação destes pontos no cubo tal que cada intervalo de um determinado tamanho e forma contenha um número de pontos correto.

Definição 10 (*Redes* (t, m, s))

Sejam $t \geq 0, m \geq 1, s \geq 1$ e $b \geq 2$ números inteiros com $t \leq m$. Uma rede (t, m, s) na base b é um conjunto P constituído por b^m pontos definidos em $[0, 1)^s$ tal que cada intervalo elementar da forma

$$\prod_{j=1}^s \left[\frac{a_j}{b^{d_j}}, \frac{a_j + 1}{b^{d_j}} \right)$$

com $d_j \geq 0, 0 \leq a_j < b^{d_j}$, e $d_1 + d_2 + \dots + d_s = m - t$, contém exatamente b^t pontos de P .

Um conjunto de b^m pontos definidos em $[0, 1)^s$ é uma rede (t, m, s) na base b , o que nos indica que o conceito de rede (t, m, s) é somente útil quando $t < m$. Por isso, o objetivo é encontrar uma rede (t, m, s) na base b com pequenos valores de t . Uma rede (t, m, s) diz-se uma rede restrita se $(t - 1, m, s)$ não é uma rede. Este valor de t é referido muitas vezes como o *parâmetro de qualidade*. Valores menores de t estão associados a maior uniformidade. Escolher um valor de b demasiado elevado também não é o indicado, já que um maior número de pontos tem que verificar a propriedade de uniformidade.

Analogamente, temos o conceito de sequências infinitas.

Definição 11 (*Sequências* (t, s))

Sejam $t \geq 0$ e $s \geq 1$ números inteiros. Uma sequência (t, s) na base b é uma sequência de pontos $S = (t_0, t_1, \dots)$ definidos em $[0, 1)^s$ tal que para quaisquer números inteiros $m > t$ e $l \geq 0$, cada bloco de b^m pontos

$$t_{lb^m}, \dots, t_{(l+1)b^m-1}$$

da sequência S , forma uma rede (t, m, s) na base b .

A sequência de **van der Corput** na base b é uma sequência-(0,1) na base b . Como exemplo para grandes dimensões, temos a *sequência de Sobol* que é uma sequência- (t, s) na base 2, onde t é uma função não decrescente de s ; a *sequência de Faure*; a *sequência de Niederreiter* e a *sequência de Niederreiter-Xing*.

As sequências de Faure possuem o melhor valor para o parâmetros de uniformidade t :

são sequências $(0, s)$ numa base $b \geq s$. Os pontos de Sobol têm a vantagem de usar uma base muito menor ($b = 2$) e permitindo trabalhar na base ($b = 2$), o que acresce vantagens computacionais.

Os pontos de Sobol partem da sequência de van der Corput na base 2, sendo as coordenadas de uma sequência de Sobol de dimensão s obtidas por permutações de segmentos da sequência de van der Corput.

Definição 12 (*rede digital* (t, m, s))

Sejam $t \geq 0, m \geq 1, s \geq 1$ números inteiros e b um número primo. Se uma rede digital P construída em \mathbb{Z}_b é uma rede $-(t, m, s)$ na base b então P designa-se rede digital- (t, m, s) em \mathbb{Z}_b .

O conceito de redes digitais pode ser alargado ao conceito de sequências infinitas $S = (t_0, t_1, \dots)$ em $[0, 1)^s$. Para construirmos este conceito são necessárias matrizes infinitas $C_1, \dots, C_s \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, com $C_j = (c_{j,k,l})_{k,l \in \mathbb{N}}$ e $c_{j,k,l} \in \mathbb{Z}_b$ tal que para cada l há um k_l tal que $c_{j,k,l} = 0$ para todo $k > k_l$. Então $t_{i,j}$, j -ésima componente do i -ésimo ponto da sequência S , é construído da seguinte forma.

1. Escrever i na sua representação na base b :

$$i = (\dots i_2 i_1)_b = i_1 + i_2 b + \dots +$$

2. Calcular

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = C_j \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

onde todas as adições e multiplicações são efetuadas no campo finito \mathbb{Z}_b .

3. Faz-se

$$t_{i,j} = (0.y_1 y_1 \dots)_b = \frac{y_1}{b} + \frac{y_2}{b^2} + \dots.$$

A sequência resultante $S = (t_0, t_1, \dots)$ designa-se de *sequência digital* em \mathbb{Z}_b e C_1, \dots, C_s são as *matrizes geradoras* da sequência digital. A seguinte definição relaciona sequências (m, s) na base b com sequências digitais.

Definição 13 (*Sequências digitais (t, s)*)

Sejam $t \geq 0, s \geq 1$ números inteiros e b um número primo. Se uma sequência digital S construída em \mathbb{Z}_b é uma sequência (t, s) na base b então S designa-se sequência digital (t, s) em \mathbb{Z}_b .

3.3 Técnicas de redução da variância

O método Monte Carlo pode ser modificado de modo a produzir uma solução para o problema em estudo, com um erro limitado, com um tempo computacional consideravelmente menor.

Nos primórdios da era computacional, dada a baixa velocidade dos primeiros computadores, a utilização de técnicas de redução da variância era essencial nas aplicações do método Monte Carlo. Embora os computadores de hoje sejam bastante mais rápidos, estas técnicas continuam a ter um papel importante já que permitem obter soluções mais precisas em menor tempo, melhorando assim a eficiência computacional das simulações Monte Carlo.

Algumas destas técnicas focam-se na redução da variabilidade nos *inputs* da simulação, e outras tentam tirar vantagem de características especiais do modelo simulado para melhorar os *outputs* da simulação.

Para diminuir o erro de integração Monte Carlo, a função f em (3.3) é substituída por uma outra função ϕ com $\int_{[0,1]^s} \phi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = I(f)$ mas de menor variância. São exemplo destas técnicas, as variáveis antitéticas, as variáveis de controle ou *importance sampling*, entre outros.

Na pesquisa sobre este tópico encontramos muitas técnicas cuja escolha não é uma tarefa fácil. A redução de variância mais eficaz deve aproveitar as condições subjacentes a cada problema em concreto. Lemieux (2009) recomenda que combinações de várias técnicas de redução da variância devem ser aplicadas com bastante cuidado. Apesar da redução da variância induzida por cada método sozinho, quando combinados, alguns termos da variância cruzada têm sinais não previstos pelos resultados teóricos. Algumas destas combinações têm sido estudadas com mais detalhe mas a investigação sobre este problema ainda continua em aberto.

3.3.1 Variáveis Antitéticas

Embora esta técnica não altere a taxa de convergência do método MC, é uma das mais utilizadas em problemas financeiros. Este facto deve-se à sua simplicidade, uma vez que não é necessário um conhecimento específico a respeito do modelo simulado. Este método foi introduzido por [Hammersley e Morton \(1956\)](#) e procura reduzir a variância, introduzindo dependência negativa entre os pares de réplicas.

Com este método, em vez de utilizarmos n observações independentes, usamos $n/2$ (n é par) pares de observações antitéticas e o estimador Monte Carlo

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{u}_i)$$

é substituído pelo estimador antitético

$$I_{n,ant} = \frac{1}{n/2} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{f(\mathbf{u}_i) + f(\tilde{\mathbf{u}}_i)}{2} \quad (3.29)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}_i$ e \mathbf{u}_i são negativamente correlacionados e uniformemente distribuídos em $[0, 1]^s$ e $\left\{ \frac{f(\mathbf{u}_i) + f(\tilde{\mathbf{u}}_i)}{2} : i = 1, \dots, \frac{n}{2} \right\}$ são independentes.

Seja $\sigma^2 = Var(f(\mathbf{U}))$. Então, a variância do estimador antitético $I_{n,ant}$ é

$$\begin{aligned} Var(I_{n,ant}) &= \frac{1}{(n/2)^2} \frac{n}{2} Var\left(\frac{f(\mathbf{u}_i) + f(\tilde{\mathbf{u}}_i)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2n} (\sigma^2 + \sigma^2 + 2Cov(f(\mathbf{u}_i), f(\tilde{\mathbf{u}}_i))) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n} Cov(f(\mathbf{u}_i), f(\tilde{\mathbf{u}}_i)). \end{aligned}$$

Recordando que $Var(I_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, a amostragem antitética produz uma redução da variância, i.e., $Var(I_{n,ant}) < Var(I_n)$, se

$$Cov(f(\mathbf{u}_i), f(\tilde{\mathbf{u}}_i)) < 0. \quad (3.30)$$

Portanto, o desempenho do método das variáveis antitéticas depende de quanto a correlação negativa entre \mathbf{u}_i e $\tilde{\mathbf{u}}_i$ é preservada pela função f .

O método pode assumir diversas formas, mas a mais comum baseia-se no facto de U e

$1 - U$ serem uniformemente distribuídas no intervalo unitário e define-se $\tilde{\mathbf{u}}_i = 1 - \mathbf{u}_i$. O teorema 8 que se segue, fornece uma condição suficiente para se obter correlação negativa e pode ser encontrado em (Lemieux, 2009, p. 94).

Teorema 8 *Seja $f : [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona e limitada em cada um dos seus argumentos. Suponha-se também que a f não é constante no interior do seu domínio. Seja $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_s) \sim U[0, 1]^s$ e $\tilde{\mathbf{U}} = (1 - U_1, \dots, 1 - U_s)$. Então $\text{Cov}(f(\mathbf{U}), f(\tilde{\mathbf{U}})) < 0$.*

Quando as condições deste teorema estão garantidas, a utilização de variáveis antitéticas deve reduzir a variância. No entanto, Lemieux (2009) refere que:

1. Se f é monótona somente num subconjunto dos seus argumentos, podemos aplicar variáveis antitéticas somente nesse subconjunto. Isto significa que, se f é monótona em $u_j : j \in J \subseteq \{1, \dots, s\}$, o estimador antitético é

$$I_{n,ant} = \frac{1}{n/2} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{f(\mathbf{u}_i) + f(\tilde{\mathbf{u}}_{J,i})}{2}$$

$$\text{onde } \tilde{\mathbf{u}}_{J,i} = (\tilde{u}_{J,i,1}, \dots, \tilde{u}_{J,i,s}) : \tilde{u}_{J,i,s} = \begin{cases} 1 - u_{ij} & \text{se } j \in J \\ w_{ij} & \text{se } j \notin J \end{cases}$$

e $w_{ij} \sim U(0, 1)$ são independentes de u_{ij} .

2. A sincronização é importante para assegurar que as dependências induzidas entre os valores de entrada são preservadas nos valores de saída. Com sincronização pretendemos dizer que os mesmos números aleatórios são utilizados com o mesmo objetivo na simulação. Se \mathbf{u}_i é utilizado somente para gerar algum *input* na primeira replicação do par antitético, então $1 - \mathbf{u}_i$ é utilizado no correspondente *input* na segunda replicação.

Usando a formulação de simulação, o estimador antitético é

$$\hat{\mu}_{ant} = \frac{1}{n/2} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{h(\mathbf{X}_i) + h(\tilde{\mathbf{X}}_i)}{2} \quad (3.31)$$

onde $\mathbf{X}_i = g(u_{i1}, \dots, u_{is})$ e $\tilde{\mathbf{X}}_i = g(1 - u_{i1}, \dots, 1 - u_{is})$.

A preservação da correlação negativa do teorema 8 depende da função g ao transformar

\mathbf{u}_i e $\tilde{\mathbf{u}}_i$ em \mathbf{X}_i e $\tilde{\mathbf{X}}_i$, e também da função h na transformação de $h(\mathbf{X}_i)$ e $h(\tilde{\mathbf{X}}_i)$. Se $Y = f(\mathbf{U}) = g(h(\mathbf{U})) = h(\mathbf{X})$ é quase linear, as variáveis antitéticas serão muito eficazes. A amostragem antitética produz um estimador de variância zero no caso linear (Glasserman, 2004).

O seguinte resultado indica um método para produzir pares de variáveis com a mesma função distribuição e com correlação mínima.

Teorema 9 *Seja X uma variável com função distribuição $F(\cdot)$. Se $\tilde{U} = 1 - U$, então $(F^{-1}(U), F^{-1}(\tilde{U}))$ tem correlação mínima entre todos os pares de variáveis aleatórias com função distribuição marginal dada por $F(\cdot)$.*

Para uma distribuição simétrica em relação à origem, $F^{-1}(1 - U) = -F^{-1}(U)$. No caso particular em que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, temos $\Phi^{-1}(1 - U) = -\Phi^{-1}(U)$ e, conseqüentemente, $\tilde{X} = -X$, o que implica uma correlação perfeita $\rho(\tilde{X}, X) = -1$.

Embora existam vários métodos para gerar variáveis aleatórias a partir de uma dada distribuição (inversão, aceitação-rejeição, composição ou convolução), o método da inversão é o preferido pelos utilizadores do método QMC (Lemieux, 2009). Embora este método seja, por vezes mais lento do que outros métodos, ele transforma números uniformes em números com uma dada distribuição, de uma forma monótona e por isso, a correlação negativa é preservada (Kelton, 2006; Nelson, 1987).

3.3.2 Variáveis de controlo

O método das variáveis de controlo tenta reduzir a variância do estimador explorando a correlação (positiva ou negativa) entre uma variável aleatória C , cujo valor esperado é conhecido ($E(C) = \mu_C$) e uma variável aleatória Y cujo valor esperado foi estimado. Suponha-se que Y e C são correlacionadas e Y_1, \dots, Y_n e C_1, \dots, C_n são duas amostras i.i.d. Segundo este método, o estimador é definido por

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{CV} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i + \beta (\mu_C - C_i)) \\ &= \hat{\mu}_{MC} + \beta (\mu_C - \hat{\mu}_C) \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde β é uma constante a determinar e que minimiza a variância do estimador (3.32). O estimador $\hat{\mu}_{CV}$ é não-enviesado uma vez que

$$\begin{aligned} E[Y_i + \beta(\mu_C - C_i)] &= E[Y_i + \beta(\mu_C - E(C_i))] \\ &= E[Y] + \beta \times 0 \\ &= \mu \end{aligned}$$

e a sua variância é

$$Var(\hat{\mu}_{CV}) = \frac{1}{n} [Var(Y_i) + \beta^2 Var(C_i) - 2\beta Cov(Y_i, C_i)]. \quad (3.33)$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} Var(\hat{\mu}_{CV}) = \frac{1}{n} [2\beta Var(C_i) - 2Cov(Y_i, C_i)]$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Var(\hat{\mu}_{CV}) = \frac{2}{n} Var(C_i).$$

Resolvendo a equação $\frac{\partial}{\partial \beta} Var(\hat{\mu}_{CV}) = 0$ e observando a positividade da segunda derivada, encontramos o mínimo de (3.33) quando

$$\beta = \beta^* := \frac{Cov(Y_i, C_i)}{Var(C_i)}. \quad (3.34)$$

Substituindo β by β^* em (3.33) obtemos

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_{CV}) &= \frac{1}{n} \left[Var(Y_i) + \frac{Cov^2(Y_i, C_i)}{Var(C_i)} - 2 \frac{Cov^2(Y_i, C_i)}{Var(C_i)} \right] \\ &= (1 - \rho^2) Var(\hat{\mu}_{MC}) < Var(\hat{\mu}_{MC}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Quanto mais próximo $|\rho|$ estiver de 1, mais significativo é o ganho na redução da variância usando $\hat{\mu}_{CV}$ em vez de $\hat{\mu}_{MC}$.

Na prática, se $E[Y]$ é desconhecido não é provável que $Cov(Y, C)$ seja conhecido e não podemos calcular β^* , mas pode ser estimado. Considerando a amostra $(C_1, Y_1), \dots, (C_n, Y_n)$, podemos substituir os parâmetros da população em (3.34) pelos seus homólogos amos-

trais e obtemos

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i C_i - n(\hat{\mu}_{MC} \cdot \hat{\mu}_C)}{(n-1)\hat{\sigma}_C^2} \quad (3.36)$$

onde a variância amostral de $\{C_i : i = 1, \dots, n\}$, $\hat{\sigma}_C^2$, pode ser substituída por $Var(C)$ se esta for conhecida. Assim, obtemos o estimador

$$\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}} = \hat{\mu}_{MC} + \hat{\beta}(\mu_C - \hat{\mu}_C). \quad (3.37)$$

Este estimador não é necessariamente não enviesado uma vez que $\hat{\beta}$ depende de C_1, \dots, C_n e, conseqüentemente, a expressão da variância (3.35) não é válida. Em alternativa, consideramos para estimador de $Var(\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}})$

$$\hat{\sigma}_{CV,\beta}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(Y_{CV,i} - \hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}} \right)^2 \quad (3.38)$$

onde $Y_{CV,i} = Y_i + \hat{\beta}(\mu_C - C_i)$.

Deve ser referido que se $\hat{\beta}$ é dado por (3.36), o estimador (3.38) não é necessariamente não enviesado uma vez que as variáveis $Y_{CV,i}$ não são independentes.

Note-se que (3.36) e (3.37) são estimadores de mínimos quadrados de β e μ do modelo de regressão aplicado aos pontos $(Y_i, C_i) : i = 1, \dots, n$

$$Y = \mu + \beta(\mu_C - C) + \epsilon \quad (3.39)$$

onde $E[\epsilon] = 0$. Então, se assumirmos que (Y, C) tem uma distribuição normal bivariada, (3.36) e (3.37) podem ser usadas para construir um estimador não enviesado $\hat{\sigma}_{CV,\beta}^2$ para $Var(\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}})$. Com esta condição de normalidade, mostra-se que

$$\frac{\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}} - \mu}{\hat{\sigma}_{CV,\beta}} \sim t_{(n-2)} \quad (3.40)$$

e $\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}}$ é um estimador não enviesado de μ . Além disso, pode ser mostrado que

$$\frac{Var(\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}})}{Var(\hat{\mu}_{CV,\beta^*})} = \frac{n-1}{n-2}$$

e quando $n \rightarrow \infty$ o aumento da variância é desprezável.

Se (Y, C) não é normal, podemos eliminar o viés usando uma técnica de *splitting* ou uma técnica de *jackknifing*. Neste último caso, o estimador é

$$\hat{\mu}_{CV,S} = \frac{1}{n} \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_{-i} (\mu_C - C_i) \right) \quad (3.41)$$

onde $\hat{\beta}_{-i}$ é o estimador dos mínimos quadrados de β com base na amostra $(Y_1, C_1), \dots, (Y_{i-1}, C_{i-1}), (Y_{i+1}, C_{i+1}), \dots, (Y_n, C_n)$. $\hat{\mu}_{CV,S}$ é não enviesado já que $\hat{\beta}_{-i}$ e C_i são independentes.

Usando a técnica *jackknifing* o estimador é definido por

$$\hat{\mu}_{CV,J} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(n \hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}} - (n-1) \hat{\mu}_{CV,\hat{\beta},-i} \right) \quad (3.42)$$

onde $\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta},-i}$ é o estimador variável de controlo $\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}}$ sem (Y_i, C_i) .

Ambas as técnicas *splitting* e *jackknifing* usam tempo computacional adicional. Uma alternativa menos dispendiosa consiste em usar um pequeno número r de *simulações piloto* e calcular $\hat{\beta}$ a partir de $\{(Y_i, C_i) : i = 1, \dots, r\}$, gastando assim menos tempo, e aplicar este coeficiente às restantes $n - r$ replicações de (Y_i, C_i) . Uma vez que $\hat{\beta}$ é independente de $\hat{\mu}_C$, os estimadores $\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}}$ e $Var(\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}})$ são não enviesados.

Se o estimador de mínimos quadrados (3.36) é utilizado para $\hat{\beta}$, o teorema do limite central aplicado a $\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}}$, estabelece que

$$\sqrt{n} \left(\hat{\mu}_{CV,\hat{\beta}} - \mu \right) \xrightarrow{i.d.} \mathcal{N}(0, \sigma_{CV,\beta}^2)$$

onde $\sigma_{CV,\beta}^2 = Var(\hat{\mu}_{CV,\beta^*})$ (dada pela equação (3.35)). Portanto, na prática, se n é suficientemente grande, podemos construir um intervalo de confiança para μ com base na distribuição normal.

3.3.3 Importance sampling

O método *importance sampling* tenta dar um maior peso à região mais importante do domínio de integração, que é a que tem um maior contributo no resultado da média MC. Este método é útil quando o foco de interesse são acontecimentos raros. Neste caso,

um pequeno número de observações é corrigido por uma amostra aleatória de pontos que são mais necessários para atingir a precisão. Isto é feito através da mudança de medida de probabilidade daqueles caminhos que são gerados para aumentar a eficiência de amostragem.

Um estimador *importance sampling* é uma média de réplicas i.i.d. que não introduz dependência entre elas.

A maior desvantagem deste método é que necessita de um conhecimento prévio do problema subjacente.

Suponhamos que queremos estimar

$$\mu = E[h(\mathbf{X})] = \int_D h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

onde $\varphi(\mathbf{x})$ é a função densidade de probabilidade de \mathbf{X} . O estimador MC naif é dado por

$$\hat{\mu}_{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{x}_i)$$

onde $\{\mathbf{x}_i : i = 1, \dots, n\}$ são amostras independentes com função densidade de probabilidade $\varphi(\mathbf{x})$. Seja $\psi(\mathbf{x})$ uma outra fdp de \mathbf{X} que satisfaz a condição

$$\varphi(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow \psi(\mathbf{x}) > 0 \tag{3.43}$$

para todo $\mathbf{x} \in D$. Podemos representar μ como

$$\mu = \int_D h(\mathbf{x}) \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Considerando o peso (também conhecido como *likelihood ratio* ou *Radon-Nikodym derivative*) $L(\mathbf{x}) = \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})}$, o integral anterior pode ser escrito como

$$\int_D h(\mathbf{x}) L(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3.44}$$

e interpretado como um valor esperado em relação à fdp $\psi(\mathbf{x})$,

$$\mu = E_{\psi} [h(\mathbf{X}) L(\mathbf{X})].$$

Se gerarmos uma amostra i.i.d. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ a partir da nova fdp $\psi(\mathbf{x})$, o estimador importance sampling fica definido por

$$\hat{\mu}_{IS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{x}_i) L(\mathbf{x}_i). \quad (3.45)$$

O estimador *importance sampling* definido em (3.45) é não enviesado desde que

$$\begin{aligned} E[\hat{\mu}_{IS}] &= E_\psi[h(\mathbf{X})L(\mathbf{X})] = \int_D h(\mathbf{x})L(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_D h(\mathbf{x}) \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_D h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mu. \end{aligned}$$

Qualquer que seja a escolha da nova fdp $\psi(\mathbf{x})$ que satisfaça a condição de continuidade absoluta (3.43), o estimador *importance sampling* (3.45) é não enviesado, mas nem todas as escolhas $\psi(\mathbf{x})$ permitem uma redução da variância.

Para comparar as variâncias com ou sem *importance sampling* observa-se que

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_{IS}) &= \frac{1}{n} Var(h(\mathbf{X})L(\mathbf{X})) \\ &= \frac{1}{n} [E_\psi[h^2(\mathbf{X})L^2(\mathbf{X})] - E_\psi[h(\mathbf{X})L(\mathbf{X})]^2] \\ &= \frac{1}{n} [E_\psi[h^2(\mathbf{X})L^2(\mathbf{X})] - \mu^2] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E_\psi[h^2(\mathbf{X})L^2(\mathbf{X})] &= \int_D h^2(\mathbf{x})L^2(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_D h^2(\mathbf{x}) \frac{\varphi^2(\mathbf{x})}{\psi^2(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_D h^2(\mathbf{x}) \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_D h^2(\mathbf{x})L(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= E[h^2(\mathbf{X})L(\mathbf{X})]. \end{aligned}$$

Assim

$$Var(\hat{\mu}_{IS}) = \frac{1}{n} [E[h^2(\mathbf{X})L(\mathbf{X})] - \mu^2], \quad (3.46)$$

e

$$Var(\hat{\mu}_{MC}) = \frac{1}{n} [E[h^2(\mathbf{X})] - \mu^2],$$

portanto, $Var(\hat{\mu}_{IS}) \leq Var(\hat{\mu}_{MC})$ se e só se

$$E[h^2(\mathbf{X})L(\mathbf{X})] \leq E[h^2(\mathbf{X})]. \quad (3.47)$$

De (3.46) concluímos que $Var(\hat{\mu}_{IS})$ é mínima quando $E[h^2(\mathbf{X})L(\mathbf{X})] = \mu^2$.

O sucesso da técnica *importance sampling* depende da seleção da função densidade $\psi(\mathbf{x})$. No caso de $h(\mathbf{X}) \geq 0, \forall \mathbf{X} \in D$, podemos escolher $\psi(\mathbf{x}) = \frac{h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})}{\mu}$ e então

$$\begin{aligned} E[h^2(\mathbf{X})L(\mathbf{X})] &= \int_D h^2(\mathbf{x})L(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_D h^2(\mathbf{x})\frac{\varphi(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \mu \int_D h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \mu^2 \end{aligned}$$

o que permite obter o mínimo de $Var(\hat{\mu}_{IS})$.

Mas a nova função densidade ótima ψ depende do conhecimento de μ , valor a ser estimado que na prática não se pode obter. Mesmo assim, a escolha ótima de ψ fornece alguma indicação útil no sentido da redução da variância do estimador: $\psi(\mathbf{x})$ deverá ser proporcionalmente próxima de $h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$. Mais detalhes podem ser encontrados em [Asmussen e Glynn \(2007\)](#) e [Lemieux \(2009\)](#) que dão algumas sugestões para uma boa escolha da nova função fdp $\psi(\mathbf{x})$.

3.3.4 Amostragem estratificada

A estratificação assenta na partição do domínio D (ou do hipercubo $[0, 1]^s$) em M subconjuntos disjuntos (estratos), amostrando um número fixo de pontos de cada sub-

conjunto (não necessariamente o mesmo), eliminando a variação entre os estratos tanto quanto possível e estimando a quantidade de interesse em separado para cada estrato. Este método é mais eficiente quando a variabilidade de $Y = h(\mathbf{X})$ dentro de cada estrato é pequena.

Suponhamos que o nosso objetivo é estimar $\mu = E[h(\mathbf{X})]$ e escrevemos $D = S_1 \cup \dots \cup S_M$ onde $S_l \cap S_m = \emptyset, \forall l \neq m$. Decidimos à priori que fração das amostras deve ser considerada em cada estrato S_j . Seja $p_j = P(\mathbf{X} \in S_j)$ para $j = 1, \dots, m$. Então

$$\mu = E[h(\mathbf{X})] = \sum_{j=1}^m p_j E[h(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in S_j]$$

sugere o estimador estratificado

$$\hat{\mu}_{Str} = \sum_{j=1}^m p_j \hat{\mu}_j \quad (3.48)$$

onde

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} h(\mathbf{X}_{i,j}).$$

Cada amostra $\mathbf{X}_{1,j}, \dots, \mathbf{X}_{N_j,j}$ de S_j é distribuída de acordo com a distribuição de $(\mathbf{X} | \mathbf{X} \in S_j)$ e N_j é o número de observações do j -ésimo estrato ($N_1 + \dots + N_m = n$). O estimador estratificado (3.48) é não enviesado

$$E[\hat{\mu}_j] = E[h(\mathbf{X}_{i,j})] = E[h(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in S_j]$$

e a variância deste estimador é

$$Var(\hat{\mu}_{Str}) = \sum_{j=1}^m \frac{p_j^2}{N_j} \sigma_j^2,$$

sendo $\sigma_j^2 = Var(h(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in S_j)$.

Com o objetivo de analisar a capacidade de redução da variância do estimador estratificado (3.48), precisamos considerar duas possibilidades na definição de N_j .

1. *Afetação proporcional*: escolher $N_j = np_j$ e, $Var(\hat{\mu}_{Str}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m p_j \sigma_j^2$ é menor do que a variância do estimador ordinário Monte Carlo $Var(\hat{\mu}_{MC}) = \frac{Var(h(\mathbf{X}))}{n}$.

2. *Afetação ótima (Neyman allocation)*: encontrar N_j que minimize $Var(\hat{\mu}_{str})$.

Neste caso, $N_j = \frac{np_j\sigma_j}{\sum_{l=1}^m p_l\sigma_l}$, $j = 1, \dots, m$ e $Var(\hat{\mu}_{str}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m p_j\sigma_j \right)^2$.

Assim, na afetação proporcional o número de elementos em cada estrato é proporcional à dimensão do estrato. Este tipo de afetação só deverá ser utilizada quando a variação dentro de cada estrato é igual ou aproximadamente igual. A afetação ótima tem em consideração esta variabilidade. Pode mostrar-se que a variância do estimador estratificado segundo a afetação ótima é menor do que a obtida segundo a afetação proporcional.

3.3.5 Hipercubo Latino

O processo de amostragem denominado Hipercubo Latino (HL) é uma forma de amostragem estratificada, onde um conjunto de pontos P_n é construído de modo que cada projeção unidimensional contenha exatamente um ponto em cada intervalo da forma $[(j-1)/n, j/n)$, para $j = 1, \dots, n$. Gerando s permutações uniformes aleatórias π_j em $[0, 1/n)$, P_n fica definido por

$$P_n = \left\{ \left(\frac{\pi_1(i)}{n} + v_{i1}, \dots, \frac{\pi_s(i)}{n} + v_{is} \right), i = 0, \dots, n-1 \right\} \quad (3.49)$$

onde v_{ij} são independentes e uniformemente distribuídas em $[0, 1/n)$ (por vezes, $v_{ij} = 1/2n$).

HL é uma técnica muito popular de redução da variância mas [Kucherenko et al. \(2011\)](#) mostra que o HL só melhora a eficiência do método Monte Carlo para certas classes de funções.

3.3.6 Monte Carlo Condicional

O método Monte Carlo condicional, também designado por método de *Rao-Blackwell*, calcula o valor esperado da quantidade de interesse condicionado pelo valor da variável

auxiliar. Mais precisamente, a ideia é calcular

$$\mu = E[Y] = E[E[Y|\mathbf{Z}]] \quad (3.50)$$

usando propriedades do valor esperado condicional. Supondo que $E[Y|\mathbf{Z}]$ é conhecido, o estimador de Monte Carlo condicional é

$$\hat{\mu}_{CMC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[Y|\mathbf{Z}_i] \quad (3.51)$$

sendo \mathbf{Z}_i obtido na i -ésima simulação, para $i = 1, \dots, n$.

O estimador definido em (3.51) é não enviesado uma vez que

$$\begin{aligned} E[\hat{\mu}_{CMC}] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[E[Y|\mathbf{Z}_i]] \\ &= E[E[Y|\mathbf{Z}_i]] = E[Y] = \mu \end{aligned} \quad (3.52)$$

e a sua variância é

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_{CMC}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(E[Y|\mathbf{Z}_i]) = \frac{1}{n} Var(E[Y|\mathbf{Z}_i]) \\ &= \frac{1}{n} [Var(Y) - E[Var(Y|\mathbf{Z}_i)]] . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Da expressão anterior concluímos que $Var(\hat{\mu}_{CMC}) \leq \frac{1}{n} Var(Y)$ e o método Monte Carlo condicional produz sempre uma redução da variância. A dificuldade reside em encontrar \mathbf{Z} de modo que o valor esperado seja calculável.

(Lemieux, 2009, p. 122) recomenda *"to get a good variance reduction, we should try to choose a conditioning variable \mathbf{Z} that "explains" \mathbf{Y} as little as possible but is still such that $E[Y|\mathbf{Z}]$ can be computed."*

3.4 Aplicações

Nas duas últimas décadas tem havido um crescente interesse dos investigadores no desenvolvimento dos métodos QMC e na teoria subjacente que permite o tratamento de problemas de dimensões elevadas. Tendo sido estudados por diversos autores, em

diversas áreas, a sua aplicação em finanças foi motivada pelos trabalhos de Paskov e Traub (1995) que usaram com sucesso sequências de baixa discrepância de dimensão 360 para avaliar lotes de obrigações com garantia hipotecária. No seu estudo, compararam o desempenho das sequências de Halton, Sobol e do método Monte Carlo, com e sem variáveis antitéticas, tendo concluído que as sequências de Sobol superaram todos os outros métodos. Relativamente à utilização de variáveis antitéticas, o seu uso melhorou a aproximação MC mas não demonstraram ser competitivas face às sequências de baixa discrepância testadas.

Durante os anos 90 diversos artigos foram publicados testemunhando a superioridade dos métodos QMC em aplicações financeiras (Boyle *et al.* (1995), Paskov (1996), Nishiyama e Tezuka (1996), Joy *et al.* (1996), Boyle *et al.* (1997), Caffisch *et al.* (1997)). Paskov (1996) introduziu o conceito de *dimensão efetiva* para explicar o sucesso dos métodos QMC num problema de finanças de dimensão 360. Esta noção quantifica a importância de cada variável na função integranda (multivariada). Diversos investigadores desenvolveram técnicas para reduzir a dimensão efetiva: *Brownian Bridges* (BB) e *Principal Components* (PC) ou modificações desta.

Caffisch *et al.* (1997) redefiniram o conceito com base na decomposição ANOVA (*Analysis of Variance*) e usaram *Brownian Bridges* para reduzir a dimensão do problema, aplicando métodos QMC a derivados dependentes da trajetória.

Acworth *et al.* (1998) compararam detalhadamente o desempenho de MC e QMC na avaliação de opções em problemas de dimensão média e elevada. Os autores concluem que os métodos QMC superam o método MC e as sequências de Sobol produzem melhores resultados do que as outras sequências testadas (Faure e GFaure (*generalized Faure*)), especialmente quando combinadas com *Brownian Bridges* ou com *Principal Components*. Em geral, a utilização de PC permite obter melhores resultados. No entanto, os autores sublinham que diferentes modelos para os ativos subjacentes e diferentes *payoffs* podem conduzir a outras conclusões. Estes autores referem ainda que quando se combinam técnicas de redução da variância que usam informação acerca da função integranda com o método MC clássico, em alguns casos, este pode ter um desempenho superior ao método QMC. Por exemplo, no caso de opções barreira, Boyle *et al.* (1997) mostraram que a técnica de *importance sampling* pode reduzir substancialmente a variância quando o subjacente se afasta do valor barreira. No entanto, como as instituições financeiras têm necessidade de comparar um grande número de opções diferentes, desenvolver métodos especiais para cada caso não é exequível na prática.

Esta ideia reforça a necessidade de métodos mais gerais que forneçam bons resultados para um grande número de problemas.

O método PC permite melhores resultados que BB mas é computacionalmente mais dispendioso. Diversas modificações foram propostas para reduzir o seu custo computacional. Åkesson e Lehoczky (2000) introduzem dois métodos novos: *Partial Principal Components* (PPC) e *Subsequence Principal Components* (SPC).

Tezuka (2002) explica o sucesso dos métodos QMC em problemas financeiros de dimensão elevada identificando duas classes de problemas para os quais o método QMC (ou RQMC) é muito mais eficiente do que MC. Uma das classes engloba problemas de dimensão efetiva baixa, a outra é a classe de problemas isotrópicos.

Tezuka (2005) mostrou que não é necessário uma dimensão efetiva baixa para que os métodos QMC tenham desempenho superior ao Monte Carlo clássico.

Como exemplo de trabalhos mais recentes, referimos Lemieux e L'Ecuyer (2001) ou Lemieux (2006) que aplicam o método QMC em finanças. Li e Mullen (2000) ao aplicar o método QMC na avaliação de opções também concluíram a favor do método QMC em relação a MC. Compararam o uso de (t,m,s) -nets com o método MC em algumas opções consideradas em Acworth *et al.* (1998), tendo concluído que estas sequências superam todas as outras usadas no estudo anterior. Glasserman (2004, p.335) refere a existência de evidência experimental que aponta as sequências de Sobol como sendo as mais usadas e as que frequentemente produzem resultados mais precisos em aplicações em Finanças.

Na avaliação de opções refira-se os trabalhos de L'Ecuyer (2004), Giles *et al.* (2008), Wang e Sloan (2011) ou Griebel *et al.* (2013).

Wang e Fang (2003) usaram BB e PCA para reduzir a dimensão do problema de avaliação de opções e melhorar a aproximação QMC.

Também se podem encontrar aplicações dos métodos QMC noutras áreas.

Jank (2005) utiliza sequências randomizadas de *Halton* aplicadas na implementação de um algoritmo usado num modelo geoestatístico de compras de livros online. O autor concluiu que o uso do método QMC randomizado produziu um ganho substancial na eficiência do algoritmo utilizado, quando comparado com implementações que usam o método MC clássico.

Li e Winker (2003) efetuaram um estudo comparativo envolvendo a simulação de séries temporais com modelos autoregressivos lineares e não lineares e encontraram uma forte evidência da superioridade dos métodos QMC.

4. Aplicação à simulação de séries temporais

Como já referimos anteriormente, o nosso estudo teve como propósito investigar se a utilização de métodos alternativos na simulação dos caminhos para o ativo subjacente a uma opção, torna mais eficiente o método Monte Carlo básico.

Neste capítulo focamo-nos num dos primeiros passos que envolvem o cálculo do preço de uma opção: a simulação de séries temporais a partir de um modelo adequado para o ativo subjacente. Iremos descrever os estudos realizados para comparar o desempenho dos métodos Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo, assim como a utilização de variáveis antitéticas aplicados a vários modelos num ambiente paramétrico.

Muitas séries financeiras apresentam assimetrias. Nos mercados financeiros, o impacto das “más notícias” sobre a volatilidade dos preços de ativos é superior ao impacto causado por “boas notícias”. Este efeito, denominado na literatura por *leverage effect*, deve ser incorporado nos modelos. A literatura sobre modelos GARCH fornece-nos uma grande variedade de especificações para a volatilidade condicional. O modelo GARCH básico, embora bastante utilizado, não tem em consideração o sinal dos choques, uma vez que na equação da volatilidade entram os seus quadrados. Diversos modelos GARCH assimétricos poderiam ter sido considerados neste estudo, nomeadamente NGARCH (Engle e Ng, 1993), EGARCH (Nelson, 1991) ou TGARCH (Zakoian, 1994).

O modelo assimétrico NGARCH é escolha comum na literatura financeira onde diversos estudos comprovaram o bom desempenho deste modelo em diversas aplicações (Duan e Simonato, 2001; Hsieh e Ritchken, 2005; Stentoft, 2008a, 2011), uma vez que é capaz de incorporar o diferente impacto dos choques positivos e negativos.

O nosso estudo envolve a simulação de séries temporais lineares e não lineares. No con-

texto dos modelos lineares consideramos o modelo AR(1) pela sua simplicidade, e no caso dos modelos não lineares, utilizamos os modelos GARCH(1,1) e NGARCH(1,1). Assumiremos que as inovações seguem duas distribuições sugeridas pela literatura: Normal e NIG (*Normal Inverse Gaussian*). Estas escolhas foram orientadas pelas múltiplas referências encontradas na literatura aos modelos assimétricos, nomeadamente NGARCH, evidenciando a sua capacidade em acomodar o efeito *leverage* (Christoffersen *et al.*, 2013; Duan, 1995; Stentoft, 2005). No modelo NGARCH, este efeito, modelado pelo parâmetro γ , está presente se $\gamma < 0$. A especificação GARCH é um caso particular deste modelo quando $\gamma = 0$.

O modelo NGARCH com inovações de uma distribuição Gaussiana Normal Inversa, *Normal Inverse Gaussian* (NIG), permite a incorporação em simultâneo de assimetria e leptocurtose, dois factos estilizados bem documentados na literatura.

A distribuição NIG é uma subclasse da distribuição hiperbólica generalizada de Barndorff-Nielsen (1978). Esta distribuição foi usada no contexto dos modelos GARCH por Barndorff-Nielsen (1997), Andersson (2001), Jensen e Lunde (2001), Forsberg e Bollerslev (2002) e mais recentemente Stentoft (2008a).

Uma das propriedades que torna estas distribuições tão populares na modelação da dinâmica temporal dos mercados financeiros é o facto de terem caudas pesadas, o que as torna mais próximas da densidade empírica das séries temporais financeiras.

A distribuição Gaussiana Normal Inversa pode ser representada como uma mistura variância-média da distribuição Normal com a distribuição Gaussiana Inversa. Modelação por mistura, significa modelar uma distribuição por uma mistura (soma ponderada) de diferentes distribuições.

Definição 14

Uma variável aleatória Y tem distribuição Gaussiana Inversa, *Inverse Gaussian* (IG), de parâmetros $a > 0$ e $b > 0$, $Y \sim \mathcal{IG}(a, b)$ se a sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f_{\mathcal{IG}}(y; a, b) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2\pi b}} y^{-3/2} \exp\left(-\frac{(a-by)^2}{2by}\right) & , \text{ se } y > 0 \\ 0 & , \text{ se } y \leq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Definição 15

A variável aleatória X segue uma distribuição \mathcal{NIG} de parâmetros a, b, δ, μ , $X \sim \mathcal{NIG}(a, b, \mu, \delta)$, se

$$\begin{aligned} X|Y = y &\sim \mathcal{N}(\mu + by, y) \\ Y &\sim \mathcal{IG}(\delta\sqrt{a^2 - b^2}, a^2 - b^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que os parâmetros satisfazem as condições $0 \leq |b| < a$ e $\delta > 0$.

Definição 16

A função densidade de probabilidade de $X \sim \mathcal{NIG}(a, b, \mu, \delta)$ é dada por

$$f_{\mathcal{NIG}}(x; a, b, \mu, \delta) = \frac{a}{\pi\delta} \exp\left(\sqrt{a^2 - b^2} + b\frac{x - \mu}{\delta}\right) \left(q\left(\frac{x - \mu}{\delta}\right)\right)^{-1} K_1\left(a q\left(\frac{x - \mu}{\delta}\right)\right) \quad (4.3)$$

onde $q(z) = \sqrt{1 + z^2}$, $K_1(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de terceira ordem e índice 1, ou seja, $K_1(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}z(t + t^{-1})\right) dt$, $0 \leq |b| < a$ e $\delta > 0$.

As principais propriedades da distribuição NIG são, a propriedade de escalonamento

$$X \sim \mathcal{NIG}(a, b, \mu, \delta) \Rightarrow cX \sim \mathcal{NIG}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, c\mu, c\delta\right)$$

e a propriedade de fecho para a convolução

$$\begin{aligned} X \sim \mathcal{NIG}(a, b, \mu_1, \delta_1), Y \sim \mathcal{NIG}(a, b, \mu_2, \delta_2) \\ \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{NIG}(a, b, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2) \end{aligned}$$

Em (4.3), μ é um parâmetro de localização, δ é um parâmetro de escala, a e b são parâmetros de forma que determinam, respetivamente, a curtose e a assimetria. Em particular, se $b = 0$ a distribuição é simétrica. Quanto menor o valor de a mais leptocúrtica será $\mathcal{NIG}(a, b, \mu, \delta)$. Por outro lado, a distribuição Normal é obtida no caso limite quando a tende para infinito.

Considerando $\rho = \frac{b}{a}$, a média e a variância de uma variável aleatória $X \sim \mathcal{NIG}(a, b, \mu, \delta)$ são dadas por

$$E(X) = \mu + \frac{\rho\delta}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$V(X) = \frac{\delta^2}{a(1-\rho^2)^{3/2}}.$$

$X \sim \mathcal{NIG}(a, b, \mu, \delta)$ então $\frac{X-\mu}{\delta} \sim \mathcal{NIG}(a, b, 0, 1)$. Assim, podemos obter uma variável aleatória com distribuição NIG de média zero e variância unitária considerando

$$\delta = \sqrt{a(1-\rho^2)^{3/2}} \quad (4.4)$$

$$\mu = \frac{-\rho\delta}{\sqrt{1-\rho^2}}. \quad (4.5)$$

Stentoft (2008a) representa esta distribuição normalizada por $\mathcal{NIG}(a, b)$.

Os coeficientes de assimetria e curtose para $X \sim \mathcal{NIG}(a, b)$ são, respetivamente

$$Skew(X) = \frac{3\rho}{\sqrt{a}\sqrt[4]{1-\rho^2}}$$

$$Kurt(X) = 3 \left(1 + \frac{4\rho^2 + 1}{a\sqrt{1-\rho^2}} \right).$$

As simulações discutidas nos capítulos 4 e 5 evoluíram numa lógica de complexidade crescente, quer pelos modelos envolvidos, quer pelo número de simulações realizadas. Na tabela seguinte faz-se uma síntese dos vários modelos simulados no capítulo 4.

Nº	Modelo	Equação	Parâmetros	Dist dos erros
(1)	AR	$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \epsilon_t$	$\alpha_0, \alpha_1, \sigma_\epsilon$	$N(0, \sigma_\epsilon^2)$
(2)	GARCH	$x_t = \mu_t + \epsilon_t$ $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$	ω, α, β	$N(0, \sigma_t^2)$ NIG
(3)	NGARCH	$x_t = \mu_t + \epsilon_t$ $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\epsilon_{t-1} + \gamma \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$	$\omega, \alpha, \beta, \gamma$	$N(0, \sigma_t^2)$ NIG

Tabela 4.1: Modelos usados para simulação

4.1 Modelos Lineares

No que concerne aos modelos lineares, o nosso trabalho teve como termo de comparação o estudo de [Li e Winker \(2003\)](#). Estes autores apresentam uma aplicação original dos métodos Monte Carlo (MC) e Quasi-Monte Carlo (QMC) na simulação de séries temporais habituais em contextos macroeconómicos.

A nossa investigação procura aprofundar o estudo de [Li e Winker \(2003\)](#) em vários aspetos. Nomeadamente, quanto ao número de passos de tempo, quanto ao número de réplicas, relativamente às distribuições dos erros usadas e quanto às medidas para avaliação de resultados.

Usando o mesmo modelo $AR(1)$ e os mesmos parâmetros, comparamos os métodos Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo e o efeito da utilização de variáveis antitéticas em ambos.

Foi utilizado o modelo AR(1)

$$\begin{aligned}x_t &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \epsilon_t \\ \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2)\end{aligned}\tag{4.6}$$

com parâmetros $\alpha_0 = 0.1$, $\alpha_1 = \{\pm 0.99, \pm 0.9, \pm 0.5, 0\}$ e $\sigma_\epsilon^2 = 0.2^2$.

Com este modelo, **Li e Winker (2003)** simularam $L = 4096, 16384, 65536$ séries $\{x_t\}_t$ para $t = 10$ passos de tempo. Estes autores avaliaram os resultados calculando a média em N réplicas dos erros relativos MRE (Mean Relative Error), em percentagem,

$$MRE_{\%} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y - y_i^*|}{|y|} \times 100 \tag{4.7}$$

sendo y o valor exato e y_i^* o valor aproximado na réplica i , com $i = 1, \dots, N$, para a estimativa da média e da variância. Assim, para a primeira medida

$$\begin{aligned}y &= E[x_{10}|x_0] \\ &= \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^{10}}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^{10} x_0\end{aligned}$$

e y_i^* é a média de x_{10} obtida por simulação em L caminhos na réplica i . No caso da variância,

$$\begin{aligned}y &= Var[x_{10}|x_0] \\ &= \sigma_\epsilon^2 \frac{1 - \alpha_1^{20}}{1 - \alpha_1^2}\end{aligned}$$

e y_i^* é a variância de x_{10} obtida por simulação¹.

Os autores consideraram os MRE obtidos em $N = 10$ simulações, no caso do método MC e os erros obtidos em $N = 1$ simulação, no caso dos métodos QMC com $L = 4096, 16384, 65536$ caminhos para x_t .

À semelhança de **Li e Winker (2003)** consideramos o mesmo número de caminhos em cada simulação $L = 4096, 16384, 65536$, mas avaliamos os resultados considerando um número mais alargado de passos de tempo, $t = 10, 130, 270$ e um número superior de

¹Em apêndice encontra-se a dedução das expressões para a média e variância condicionais em função de t .

réplicas $N = 10$, $N = 100$ e $N = 1000$. Pretendemos averiguar o comportamento dos métodos QMC com o aumento da dimensão. O crescente número de réplicas teve como objetivo a estabilidade dos resultados.

No método Monte Carlo usamos números pseudo-aleatórios (PRN) gerados pela função “runif” do software *R*. Para o método Quasi-Monte Carlo testamos as sequências de baixa discrepância de *Halton*, *Sobol* e *Sobol Scrambling* (*Sobol S*), disponíveis no *R* e geradas pelas funções “runif.Halton” e “runif.Sobol”, com a *package fOptions*.

Os resultados foram analisados calculando a média dos erros relativos (em percentagem) obtidos em $N = 10, 100, 1000$ simulações, no caso dos PRN, e em $N = 1$ simulação, no caso dos métodos QMC, para a média e variância em diversos momentos ($t = 10, 130, 270$), usando para valores de referência a média e variância condicionais. Para uma melhor caracterização das densidades marginais, calculamos ainda o primeiro e terceiro quartis, respetivamente Q1 e Q3, o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose.

Além destas medidas, comparamos ainda as densidades marginais usando os testes de *Kolmogorov-Smirnov* (K-S)¹ e *Probability Integral Transform* (PIT) (*Diebold et al.*, 1998)². Todas estas medidas foram calculadas com e sem o uso de variáveis antitéticas. Nas tabelas 4.2 a 4.7 podemos observar os MRE(%) na estimativa da média e da variância em $t = 10, 130, 270$ considerando os vários métodos. Os valores apresentados na coluna “PRN10” referem-se à média dos erros obtidos em 10 simulações usando números pseudo-aleatórios. Analogamente, “PRN100” e “PRN1000” referem-se à média dos erros obtidos em 100 e 1000 simulações, respetivamente. Nas colunas “Halton”, “Sobol” e “SobolS” apresentam-se os erros obtidos numa simulação usando as sequências de baixa discrepância de Halton, de Sobol e de Sobol com scrambling. Os valores das seis colunas mais à direita foram obtidos com variáveis antitéticas e os restantes valores sem variáveis antitéticas.

Quando se analisa o desempenho de cada um dos métodos comparando o efeito da utilização de variáveis antitéticas, podemos concluir que, para a média houve uma clara melhoria quando se utiliza esta técnica³. Quando não são utilizadas variáveis antitéticas, e comparando os erros para os PRN e para as diversas sequências, concluímos que as sequências de *Sobol* apresentam o melhor desempenho para todos os tempos considerados $t = 10, 130, 270$. Além disso, podemos concluir que o ganho obtido em

¹Para aprofundar a leitura sobre este e outros testes estatísticos, consultar *Thas* (2010).

²Ver Apêndice A.

³*Li e Winker* (2003) obtiveram erros nulos apenas no caso das sequências (t,m,s).

precisão usando os métodos QMC é muito superior ao ganho obtido aumentando o número de caminhos no método MC (com PRN), refletindo a baixa discrepância destes conjuntos de números. Podemos observar este facto, por exemplo examinando a tabela 4.2 e comparando o erro correspondente a $\alpha_1 = 0.5$ e $L = 65536$ na coluna “PRN10” (0.277721) com a coluna “*Sobol*” e $L = 4096$ (0.057596).

Quando aumentamos a dimensão, as sequências de Halton são pouco estáveis, originando frequentemente erros bastante superiores aqueles que se obtêm com a utilização de PRN¹.

Relativamente à variância, a utilização de variáveis antitéticas parece não ser vantajosa em caso algum, uma vez que, de uma forma geral, os erros são superiores. Quando se comparam os métodos MC e QMC (com ou sem variáveis antitéticas), os últimos superam claramente os primeiros, não sendo clara qual a sequência a preferir.

Quando analisamos outros coeficientes, como o primeiro e terceiro quartis, coeficiente de assimetria e curtose, das distribuições marginais obtidas através da amostragem com PRN verifica-se que estas distribuições são simétricas e mesocúrticas, assemelhando-se à Normal. Os testes K-S e PIT corroboram estas conclusões.

Quando a amostragem recorre às sequências de Halton, para $t = 10$ a distribuição marginal aproxima-se da Normal. Para $t = 130$ e $t = 270$ a hipótese nula é maioritariamente rejeitada evidenciando os problemas de dimensionalidade destes números.

Quando se usam as sequências de *Sobol* e *Sobol Scrambling*, verifica-se que as distribuições marginais são simétricas e mesocúrticas, assemelhando-se à Normal. Esta informação é confirmada pelos testes de ajuste K-S e PIT.

¹No capítulo 3, página 40 é fornecida uma explicação para este facto.

α_1	L	sem antitéticas					com antitéticas						
		PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols
-0.99	4096	1.154724	0.878811	0.826481	0.136704	0.014935	0.032050	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.598241	0.445594	0.415847	0.046310	0.008340	0.007081	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.211464	0.221194	0.222262	0.007292	0.001177	0.003012	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.90	4096	2.009695	1.501340	1.377938	0.306644	0.018069	0.054902	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	1.077421	0.764237	0.698093	0.106126	0.012737	0.012431	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.344972	0.350031	0.369173	0.018464	0.002909	0.003945	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.50	4096	3.888312	4.065305	4.147675	1.605507	0.098953	0.129728	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	2.508822	2.419482	2.122131	0.624261	0.036991	0.047010	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.850687	1.000053	1.082913	0.125445	0.007200	0.002312	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.00	4096	1.680947	2.388965	2.468191	1.541065	0.108970	0.090478	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	1.037621	1.213198	1.247427	0.530051	0.022393	0.039078	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.361458	0.580675	0.618536	0.130825	0.000853	0.001248	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.50	4096	1.070506	1.284058	1.407945	1.466638	0.057596	0.063738	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.720745	0.655424	0.715892	0.466946	0.009459	0.024654	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.277721	0.346576	0.357360	0.136395	0.001201	0.000666	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.90	4096	0.656196	0.512100	0.514741	0.685903	0.003633	0.009966	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.362570	0.255962	0.275447	0.225251	0.000316	0.010598	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.187748	0.146925	0.140050	0.068527	0.000185	0.000495	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.99	4096	0.553055	0.403097	0.393866	0.480774	0.002908	0.002652	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.275702	0.195757	0.208056	0.157802	0.001394	0.008050	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.140751	0.108881	0.106283	0.047947	0.000157	0.000438	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tabela 4.2: MARE (%) para a estimativa da média de x_{10}

α_1	L	sem antitéticas						com antitéticas					
		PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols
-0.99	4096	4.089965	5.314651	5.696981	0.582828	0.071438	0.052575	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	1.725185	2.199981	2.783585	2.999595	0.019973	0.082046	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	1.497266	1.317746	1.389146	0.380439	0.009112	0.006014	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.90	4096	10.432270	11.354515	11.247326	12.138841	0.046029	0.425921	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	5.345164	5.276853	5.467185	5.808548	0.064843	0.190773	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	2.767573	2.701743	2.716879	2.172115	0.002280	0.022677	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.50	4096	3.654916	3.755143	4.208029	15.056944	0.007991	0.003566	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	1.073177	2.142102	2.196428	4.211965	0.025069	0.026208	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.755660	1.051811	1.098594	1.939009	0.005594	0.004425	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.00	4096	2.241828	2.285557	2.431333	14.912863	0.004654	0.014175	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.789884	1.178747	1.262070	4.389172	0.011668	0.006902	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.462064	0.619523	0.643187	1.798739	0.003843	0.003772	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.50	4096	1.471014	1.394802	1.426659	13.835785	0.001095	0.024997	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.738691	0.657884	0.722227	4.199812	0.004762	0.006778	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.422152	0.352021	0.360545	1.655903	0.001244	0.000661	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.90	4096	0.619706	0.604924	0.581517	10.304308	0.000212	0.023993	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.339741	0.299990	0.282774	3.585543	0.003687	0.001651	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.123610	0.136615	0.141615	1.571929	0.000574	0.001504	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.99	4096	0.249195	0.231029	0.221163	7.190302	0.000968	0.004637	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.126672	0.127616	0.114052	2.744240	0.000836	0.002385	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.059030	0.061624	0.057579	1.100728	0.000199	0.000852	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tabela 4.3: MARE (%) para a estimativa da média de $x_{1,30}$

α_1	L	sem antitéticas						com antitéticas					
		PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	SobolS	PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	SobolS
-0.99	4096	18.400422	15.491643	15.697863	12.258257	0.171762	0.570204	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	9.718739	8.268842	7.660068	8.688378	0.048958	0.163644	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	3.625332	4.028027	3.957245	2.582053	0.002259	0.010978	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.90	4096	10.209686	10.503624	10.626095	31.921855	0.036041	0.265598	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	7.807494	5.707122	5.448651	10.986115	0.020147	0.099543	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	3.397843	2.713147	2.733528	3.073257	0.017730	0.009317	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.50	4096	4.541188	4.060436	4.237202	32.053503	0.005109	0.048087	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	2.068800	2.221275	2.174728	8.890998	0.029845	0.019166	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.639985	1.090204	1.079466	2.330239	0.006282	0.002919	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.00	4096	1.822082	2.187167	2.461150	32.158958	0.010800	0.012624	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.955346	1.193642	1.250902	8.874447	0.017841	0.003245	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.287746	0.623570	0.624603	1.888177	0.002363	0.003517	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.50	4096	1.391931	1.272977	1.422164	32.293984	0.024886	0.010889	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.675173	0.734524	0.726221	8.790569	0.001439	0.008187	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.210686	0.347999	0.351495	1.637472	0.000337	0.002440	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.90	4096	0.412228	0.519610	0.582869	31.575898	0.008548	0.008072	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.254560	0.319279	0.293376	6.982632	0.001875	0.002887	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.137471	0.122966	0.138305	1.959923	0.000397	0.000817	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.99	4096	0.193253	0.205202	0.196647	18.491466	0.002387	0.003706	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	16384	0.082558	0.084416	0.097441	4.833347	0.000435	0.001645	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	65536	0.045124	0.045693	0.047454	1.639626	0.000204	0.000747	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tabela 4.4: MARE (%) para a estimativa da média de x_{270}

α_1	L	sem antiéticas										com antiéticas					
		PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols				
-0.99	4096	2.040604	1.904470	1.776926	0.040587	0.229159	0.625755	2.345319	2.630204	2.540879	0.106451	0.134689	0.477904				
	16384	0.657710	0.855017	0.848419	0.041362	0.059031	0.004456	1.310580	1.369634	1.268023	0.010366	0.439590	0.377639				
	65536	0.439013	0.446496	0.446573	0.009418	0.039998	0.009066	0.491805	0.607761	0.618252	0.010308	0.023793	0.016606				
-0.90	4096	2.152738	1.955934	1.768516	0.010793	0.528799	0.986142	2.463483	2.662706	2.539331	0.190676	0.475293	0.865501				
	16384	0.601974	0.905943	0.847347	0.067859	0.095182	0.013719	1.623650	1.378766	1.254874	0.012186	0.740358	0.677575				
	65536	0.426329	0.420138	0.443652	0.002589	0.058349	0.003143	0.470001	0.594210	0.628379	0.020546	0.045766	0.016859				
-0.50	4096	2.413071	1.824853	1.768996	0.015778	1.501887	1.579962	3.718787	2.552361	2.428346	0.379512	1.693246	1.498403				
	16384	0.785212	0.843754	0.835561	0.103398	0.040841	0.002054	1.442574	1.389091	1.215808	0.128686	1.469740	1.408841				
	65536	0.514263	0.454117	0.434392	0.042027	0.007169	0.006281	0.593018	0.638002	0.611061	0.047033	0.007739	0.020037				
0.00	4096	2.913023	1.809961	1.729579	0.193197	0.235329	0.079392	3.425297	2.667133	2.416199	0.226310	0.662311	0.004056				
	16384	0.970061	0.861604	0.827651	0.122180	0.084733	0.023325	1.370552	1.310627	1.213351	0.195162	0.186958	0.001619				
	65536	0.636558	0.475048	0.437512	0.049817	0.030238	0.009620	0.772430	0.698462	0.601238	0.049605	0.058185	0.012445				
0.50	4096	1.956884	1.631468	1.694895	0.504013	0.968231	1.524491	2.836866	2.512650	2.509048	0.493673	0.170775	1.571178				
	16384	1.006782	0.779620	0.869647	0.227892	0.137087	0.038585	1.269806	1.163901	1.224518	0.489732	1.121860	1.434702				
	65536	0.448636	0.453393	0.448990	0.076682	0.042742	0.023248	0.747881	0.693118	0.632412	0.118512	0.096988	0.024880				
0.90	4096	1.037013	1.673733	1.799221	1.762705	0.799389	0.950009	1.208996	2.328421	2.464442	2.778158	2.119019	0.960427				
	16384	1.216245	0.881573	0.890407	0.613104	0.471930	0.023606	1.443505	1.262791	1.244675	1.113462	0.195693	0.668613				
	65536	0.490096	0.448738	0.434046	0.198295	0.094010	0.028181	0.885230	0.583467	0.621720	0.372062	0.225425	0.032762				
0.99	4096	1.453293	1.726023	1.806060	1.959452	1.414329	0.552951	1.197412	2.350198	2.476080	3.255678	2.803926	0.573353				
	16384	1.173289	0.838122	0.883974	0.660352	0.563109	0.033699	1.807998	1.250567	1.244286	1.177713	0.665430	0.358820				
	65536	0.513930	0.442917	0.442578	0.210466	0.130695	0.022443	0.929609	0.585502	0.623994	0.396187	0.266427	0.027032				

Tabela 4.5: MARE (%) para a estimativa da variância de x_{10}

α_1	L	sem antitéticas						com antitéticas					
		PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols
-0.99	4096	2.134218	1.609795	1.758720	63.795687	1.209958	5.120747	2.22139	2.250648	2.398044	74.128415	8.553811	5.354470
	16384	1.096718	0.974249	0.888728	27.737165	0.116263	1.488017	1.059620	1.184737	1.212889	47.694692	0.221544	3.083630
	65536	0.401059	0.408984	0.456775	0.497706	0.304715	0.194126	0.766919	0.570326	0.633371	9.110332	0.607168	0.127791
-0.90	4096	1.432684	1.736340	1.775182	76.021139	0.480693	0.690790	2.373080	2.180972	2.444300	85.151978	1.371506	0.263481
	16384	0.562897	0.937880	0.879609	40.023582	0.224247	0.673998	0.966922	1.178111	1.212384	61.621870	0.185928	0.594345
	65536	0.502724	0.452879	0.436622	4.121435	0.149369	0.517123	0.729390	0.693182	0.607276	9.901492	0.065663	0.464176
-0.50	4096	1.489628	1.642487	1.726607	53.104421	0.505741	0.422510	2.822688	2.495716	2.444995	62.335643	1.099996	0.436520
	16384	0.838592	0.983921	0.887479	29.638231	0.209962	0.212250	0.897423	1.175854	1.210944	41.877823	0.242698	0.154748
	65536	0.402770	0.449610	0.433409	7.878072	0.153195	0.000333	0.773274	0.681277	0.626526	14.938194	0.185177	0.016900
0.00	4096	2.293925	1.832322	1.746025	0.600456	0.317164	0.055713	3.333698	2.621854	2.428721	7.567025	0.674339	0.194926
	16384	0.864008	0.847327	0.901779	1.679149	0.103899	0.010713	1.283468	1.222928	1.245671	2.673980	0.160327	0.035285
	65536	0.490572	0.438376	0.438094	0.110755	0.030164	0.014617	0.869049	0.600598	0.664814	0.805319	0.058178	0.026547
0.50	4096	2.375598	1.903974	1.773470	115.698192	0.385877	0.474512	2.689646	2.461032	2.407082	134.089953	0.608083	0.808071
	16384	1.145006	0.887502	0.880099	41.112413	0.054896	0.157476	1.482635	1.289074	1.248231	82.187110	0.210673	0.161284
	65536	0.370891	0.442184	0.462121	7.649404	0.097770	0.070539	0.644263	0.628509	0.649943	8.399437	0.048175	0.115181
0.90	4096	2.278628	1.805693	1.771501	330.662199	1.277938	0.121796	1.927294	2.356196	2.539498	640.216472	0.972976	1.312528
	16384	1.104330	0.851322	0.880083	56.467650	0.268947	0.514677	1.791797	1.180679	1.269903	155.609693	0.964369	0.630319
	65536	0.432144	0.469219	0.437945	1.466018	0.127358	0.642211	0.788395	0.610010	0.612228	11.617804	0.062161	0.705512
0.99	4096	2.576013	1.938748	1.770011	446.049996	4.120780	0.165531	3.466525	2.731399	2.486023	991.381206	1.782939	3.171058
	16384	0.876847	0.871797	0.871985	77.899232	1.219000	0.588477	1.653686	1.250901	1.250965	203.406323	2.930279	2.152151
	65536	0.494993	0.489237	0.468212	6.995470	0.825710	0.163850	0.650879	0.647818	0.659940	24.583344	1.138697	0.293427

Tabela 4.6: MARE (%) para a estimativa da variância de x_{130}

α_1	sem antitéticas							com antitéticas						
	L	PRN10	PRN100	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	PRN1000	Halton	Sobol	Sobols
-0.99	4096	2.375657	1.645724	1.755564	90.641724	5.127951	1.172744	3.483638	2.492162	2.463424	93.248053	2.930836	2.348754	
	16384	1.149749	0.757123	0.856737	75.154685	0.487415	1.245028	1.498710	1.208501	1.188615	84.994309	0.416384	1.281498	
	65536	0.447255	0.411781	0.445318	46.517036	0.128508	0.531180	0.730755	0.593913	0.598363	63.350408	0.705253	0.935127	
-0.90	4096	1.303268	1.668476	1.853123	87.981910	5.868905	4.185923	2.857443	2.203326	2.475425	88.653959	5.902935	4.754459	
	16384	0.929618	0.775551	0.871098	77.850360	0.230843	0.002494	0.718120	1.086914	1.233660	85.443058	0.251778	0.202631	
	65536	0.326815	0.462486	0.450670	55.620804	0.172199	0.008311	0.490218	0.662403	0.629303	69.298451	0.249311	0.045466	
-0.50	4096	1.182477	1.514409	1.760259	59.037662	0.280830	0.000638	1.714405	2.072047	2.436392	54.928716	0.599125	0.184098	
	16384	1.099452	0.928495	0.891772	49.918988	0.085984	0.042370	1.126123	1.266895	1.247323	58.756018	0.170676	0.061907	
	65536	0.570109	0.540344	0.452291	28.508599	0.061687	0.006378	0.653576	0.651589	0.618186	41.827649	0.070313	0.014634	
0.00	4096	1.428926	1.478905	1.766532	3.303992	0.355729	0.046787	1.671778	2.195839	2.477309	20.530569	0.666112	0.119971	
	16384	1.058318	0.901323	0.881551	0.687786	0.092234	0.030452	1.207348	1.258706	1.259925	3.876335	0.185986	0.022303	
	65536	0.540335	0.499961	0.439421	0.337044	0.029442	0.026503	0.540190	0.606847	0.611197	0.800806	0.049768	0.043567	
0.50	4096	1.843560	1.575943	1.723841	178.879549	0.659611	0.031868	2.410912	2.303026	2.470073	238.505214	1.212855	0.004646	
	16384	1.166998	0.939886	0.865101	127.822709	0.162352	0.020509	1.451425	1.342251	1.238372	145.944996	0.321012	0.027990	
	65536	0.468248	0.419570	0.439228	47.941230	0.007308	0.048571	0.653603	0.603865	0.596649	90.555380	0.044120	0.058667	
0.90	4096	1.323143	1.762588	1.771424	1075.804116	3.489224	5.101496	2.639333	2.491407	2.445131	1578.635881	1.793990	5.705333	
	16384	0.648023	0.916228	0.884047	430.675408	0.342331	0.131796	0.977907	1.383845	1.266096	750.226575	0.854734	0.016901	
	65536	0.307231	0.414705	0.446458	101.696128	0.002143	0.010201	0.733399	0.610233	0.643384	227.296234	0.073911	0.061280	
0.99	4096	1.271073	1.831429	1.899557	2534.852539	3.872068	0.617929	1.935760	2.534415	2.480686	5111.542871	1.365463	0.926291	
	16384	0.947931	0.839552	0.890000	656.989482	0.459072	0.848438	1.373600	1.175078	1.272574	1368.912284	0.186288	0.105798	
	65536	0.625651	0.454492	0.458010	137.675827	0.355826	0.306294	1.246312	0.663861	0.646843	313.639394	0.190371	0.448669	

Tabela 4.7: MARE (%) para a estimativa da variância de x_{270}

4.2 Modelos não Lineares

Nesta secção estendemos o estudo da secção anterior aos modelos não lineares.

Apresentamos resultados para dois modelos GARCH habitualmente encontrados na literatura sobre avaliação de opções, o modelo simétrico e o modelo assimétrico NGARCH (*non-linear asymmetric* GARCH) (Engle e Ng, 1993). O modelo NGARCH é capaz de incorporar o diferente impacto dos choques positivos e negativos. Neste modelo considera-se

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) &= r_t = r_f + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha (\epsilon_{t-1} + \gamma \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\epsilon_t = \sigma_t z_t$, $z_t \sim f(0, 1)$, $\omega > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\alpha(1 + \gamma^2) + \beta < 1$.

Para f consideramos as distribuições Gaussian *standard* e NIG (*Normal Inverse Gaussian*).

Simulações

Com dois conjuntos de parâmetros $\omega = 10^{-5}$, $\alpha = 0.04$, $\beta = 0.9$, $\gamma = 0$, $\lambda = 0$ e $\omega = 10^{-5}$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.8$, $\gamma = -0.5$, $\lambda = 0$ simulamos $L = 4096, 16384, 65536$ séries de retornos $\{r_t\}_t$ usando PRN e LDS. Assumimos que os erros seguem a distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$ e as distribuições $\mathcal{NIG}(2, 0)$ e $\mathcal{NIG}(2, 0.2)$ de média zero e variância unitária. Para as sequências de baixa discrepância usamos as sequências de *Sobol* (S) e *Sobol Scrambling* (SS), que já tínhamos usado no caso dos modelos lineares. Uma vez que as sequências de *Halton* se revelaram pouco eficientes no estudo anterior, foram excluídas no estudo com os modelos GARCH.

Uma vez que os erros obtidos têm uma ordem de grandeza bastante baixa, os resultados foram analisados calculando a média dos erros quadráticos médios MSE¹ (em vez de MRE, como na secção anterior)

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y - y_i^*)^2$$

obtidos em $N = 10, 100, 1000$ simulações, no caso dos PRN, e em $N = 1$ simulação, no

¹ y representa o valor exato e y^* representa o valor simulado.

caso dos métodos QMC (uma vez as sequências LDS são determinísticas), para a média e variância em diversos momentos ($t = 10, 130, 270$) usando para valores de referência a média e variância condicionais dadas pelas expressões (4.10) e (4.11), deduzidas no texto mais abaixo.

Os valores dos erros estão reportados nas tabelas 4.8 a 4.13. Foram ainda calculadas outras medidas: primeiro e terceiro quartis, o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose. Comparamos ainda as densidades marginais usando os testes *Kolmogorov-Smirnov* (K-S) e *Probability Integral Transform* (PIT).

Variância não condicional

$$\begin{aligned}
 E(\sigma_t^2) &= E(E(\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\omega + \alpha(\epsilon_{t-1}^2 + 2\gamma\epsilon_{t-1}\sigma_{t-1} + \gamma^2\sigma_{t-1}^2) + \beta\sigma_{t-1}^2) \\
 &= \omega + \alpha E(z_{t-1}^2\sigma_{t-1}^2) + 2\alpha\gamma E(z_{t-1}\sigma_{t-1}^2) + \alpha\gamma^2 E(\sigma_{t-1}^2) + \beta E(\sigma_{t-1}^2) \\
 &= \omega + \alpha E(z_{t-1}^2) E(\sigma_{t-1}^2) + 2\alpha\gamma E(z_{t-1}) E(\sigma_{t-1}^2) + \alpha\gamma^2 E(\sigma_{t-1}^2) + \beta E(\sigma_{t-1}^2) \\
 &= \omega + [\alpha E(z_{t-1}^2) + 2\alpha\gamma E(z_{t-1}) + \alpha\gamma^2 + \beta] E(\sigma_{t-1}^2)
 \end{aligned}$$

Como $E(z_t) = 0$ e $V(z_t) = 1$, $E(z_t^2) = V(z_t) + E(z_t)^2 = 1$

$$E(\sigma_t^2) = \omega + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) E(\sigma_{t-1}^2).$$

Considerando que o processo é estacionário, $E(\sigma_t^2) = E(\sigma_{t-1}^2) = \sigma^2$, obtém-se a expressão para a variância não condicional

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta)}. \quad (4.9)$$

Previsão da volatilidade

Assumindo que a origem da previsão é h , tem-se para a previsão da volatilidade um passo à frente

$$\begin{aligned}
 \sigma_h^2(1) &= E[\sigma_{h+1}^2 | \mathcal{F}_h] \\
 &= E[\omega + \alpha(\epsilon_h^2 + 2\gamma\epsilon_h\sigma_h + \gamma^2\sigma_h^2) + \beta\sigma_h^2 | \mathcal{F}_h] \\
 &= \omega + \alpha(\epsilon_h^2 + 2\gamma\epsilon_h\sigma_h + \gamma^2\sigma_h^2) + \beta\sigma_h^2 \\
 &= \sigma_{h+1}^2
 \end{aligned}$$

A previsão dois passos à frente

$$\begin{aligned}
\sigma_h^2(2) &= E [\sigma_{h+2}^2 | \mathcal{F}_h] \\
&= E [\omega + \alpha (\epsilon_{h+1}^2 + 2\gamma\epsilon_{h+1}\sigma_{h+1} + \gamma^2\sigma_{h+1}^2) + \beta\sigma_{h+1}^2 | \mathcal{F}_h] \\
&= \omega + \underbrace{\alpha E [\epsilon_{h+1}^2 | \mathcal{F}_h]}_{\sigma_{h+1}^2 = \sigma_h^2(1)} + 2\alpha\gamma E [\epsilon_{h+1}\sigma_{h+1} | \mathcal{F}_h] + \underbrace{\alpha\gamma^2 E [\sigma_{h+1}^2 | \mathcal{F}_h]}_{\sigma_h^2(1)} + \underbrace{\beta E [\sigma_{h+1}^2 | \mathcal{F}_h]}_{\sigma_h^2(1)} \\
&= \omega + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) \sigma_h^2(1) + 2\alpha\gamma E [\epsilon_{h+1}\sigma_{h+1} | \mathcal{F}_h]
\end{aligned}$$

Atendendo a que $\epsilon_t = z_t\sigma_t$ e $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_h^2(2) &= \omega + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) \sigma_h^2(1) + 2\alpha\gamma E [z_{h+1}\sigma_{h+1}^2 | \mathcal{F}_h] \\
&= \omega + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) \sigma_h^2(1)
\end{aligned}$$

De forma análoga, para a previsão a três passos

$$\begin{aligned}
\sigma_h^2(3) &= E [\sigma_{h+3}^2 | \mathcal{F}_h] \\
&= E [\omega + \alpha (\epsilon_{h+2}^2 + 2\gamma\epsilon_{h+2}\sigma_{h+2} + \gamma^2\sigma_{h+2}^2) + \beta\sigma_{h+2}^2 | \mathcal{F}_h] \\
&= \omega + \alpha E [\epsilon_{h+2}^2 | \mathcal{F}_h] + 2\alpha\gamma E [\epsilon_{h+2}\sigma_{h+2} | \mathcal{F}_h] + \underbrace{\alpha\gamma^2 E [\sigma_{h+2}^2 | \mathcal{F}_h]}_{\sigma_h^2(2)} + \underbrace{\beta E [\sigma_{h+2}^2 | \mathcal{F}_h]}_{\sigma_h^2(2)} \\
&= \omega + \alpha E [(z_{h+2}^2 - 1) \sigma_{h+2}^2 | \mathcal{F}_h] + 2\alpha\gamma E [z_{h+2}\sigma_{h+2}^2 | \mathcal{F}_h] + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) \sigma_h^2(2) \\
&= \omega + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) \sigma_h^2(2) \\
&= \omega + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) [\omega + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) \sigma_h^2(1)] \\
&= \omega [1 + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta)] + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta)^2 \sigma_h^2(1).
\end{aligned}$$

Analogamente, também se tem

$$\sigma_h^2(4) = \omega + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta) \sigma_h^2(3).$$

Por uma questão de simplificação, considere-se $\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta = k$.

$$\begin{aligned}\sigma_h^2(4) &= \omega + k\sigma_h^2(3) \\ &= \omega + k(\omega(1+k) + k^2\sigma_h^2(1)) \\ &= \omega(1+k+k^2) + k^3\sigma_h^2(1).\end{aligned}$$

Para previsão l passos à frente, tem-se

$$\begin{aligned}\sigma_h^2(l) &= \omega + k\sigma_h^2(l-1) \\ &= \omega(1+k+k^2+\dots+k^{l-2}) + k^{l-1}\sigma_h^2(1) \\ &= \omega \frac{1-k^{l-1}}{1-k} + k^{l-1}\sigma_h^2(1) \\ &= \omega \frac{1-(\alpha+\alpha\gamma^2+\beta)^{l-1}}{1-(\alpha+\alpha\gamma^2+\beta)} + (\alpha+\alpha\gamma^2+\beta)^{l-1}\sigma_h^2(1).\end{aligned}$$

Atendendo a que $\frac{\omega}{1-(\alpha+\alpha\gamma^2+\beta)} = \sigma^2$ (variância não condicional), temos para a previsão da volatilidade a l passos no modelo assimétrico NGARCH, é dada por

$$\begin{aligned}\sigma_h^2(l) &= \sigma^2 \left[1 - (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta)^{l-1} \right] + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta)^{l-1} \sigma_h^2(1) \\ &= \sigma^2 + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta)^{l-1} (\sigma_h^2(1) - \sigma^2), \quad l > 1.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Note-se que, como $\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta < 1$,

$$\sigma_h^2(l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \sigma^2$$

Assim, a volatilidade prevista l passos à frente, converge para a volatilidade não condicional à medida que o horizonte de previsão aumenta.

Valor esperado dos retornos

Considerando $\lambda = 0$ (valor usado nas simulações) e (4.8), obtemos a expressão $r_{t+1} = r_f - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \epsilon_{t+1}$.

A previsão a um passo com origem em h é dada por

$$\begin{aligned}
 r_h(1) &= E[r_{h+1} | \mathcal{F}_h] \\
 &= E\left[r_f - \frac{1}{2}\sigma_{h+1}^2 + \epsilon_{h+1} | \mathcal{F}_h\right] \\
 &= r_f - \frac{1}{2}E[\sigma_{h+1}^2 | \mathcal{F}_h] + E[\epsilon_{h+1} | \mathcal{F}_h] \\
 &= r_f - \frac{1}{2}\sigma_h^2(1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_h(2) &= E[r_{h+2} | \mathcal{F}_h] \\
 &= E\left[r_f - \frac{1}{2}\sigma_{h+2}^2 + \epsilon_{h+2} | \mathcal{F}_h\right] \\
 &= r_f - \frac{1}{2}E[\sigma_{h+2}^2 | \mathcal{F}_h] + E[\epsilon_{h+2} | \mathcal{F}_h] \\
 &= r_f - \frac{1}{2}\sigma_h^2(2).
 \end{aligned}$$

Prosseguindo de forma análoga obtém-se a previsão l passos à frente

$$\begin{aligned}
 r_h(l) &= r_f - \frac{1}{2}\sigma_h^2(l) \\
 &= r_f - \frac{1}{2}\left[\sigma^2 + (\alpha + \alpha\gamma^2 + \beta)^{l-1}(\sigma_h^2(1) - \sigma^2)\right], \quad l \geq 1.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nas tabelas 4.8 a 4.10 podem observar-se os erros obtidos, multiplicados por 10^6 , para a estimativa da média e da variância para os dois modelos considerados, GARCH e NGARCH e para diferente número de caminhos e para cada um dos métodos usados. Na coluna PRN10 reporta-se a média dos erros obtidos em 10 simulações usando números pseudo-aleatórios (PRN). Analogamente, as colunas PRN100 e PRN1000 contêm a média dos erros obtidos em 100 e 1000 simulações, respetivamente. Nas colunas Sobol e SobolS encontram-se os erros obtidos numa simulação usando as sequências de *Sobol* e as sequências de *Sobol* com *scrambling*.

Observando as tabelas referentes aos erros nas estimativas da média, constata-se que, embora todos os erros sejam muito pequenos, a utilização das sequências de baixa discrepância ainda se mostrou vantajosa.

No caso da variância, isso não aconteceu sendo todos os valores muito semelhantes.

Também o uso de variáveis antitéticas não se mostrou vantajosa nestes modelos.

Modelo	L	sem antitéticas					com antitéticas				
		PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols
GARCH	4096	0.006618	0.007279	0.008407	0.005865	0.005785	0.008820	0.009575	0.008857	0.005809	0.005809
	16384	0.007934	0.006026	0.006472	0.005832	0.005810	0.005860	0.006492	0.006414	0.005809	0.005809
	65536	0.006628	0.005783	0.005949	0.005815	0.005791	0.005809	0.005809	0.005809	0.005809	0.005809
NGARCH	4096	0.004259	0.005133	0.006149	0.003478	0.003345	0.006848	0.006991	0.006606	0.003409	0.003304
	16384	0.005294	0.003669	0.004034	0.003370	0.003296	0.003526	0.003981	0.004003	0.003353	0.003310
	65536	0.003968	0.003341	0.003479	0.003343	0.003297	0.003362	0.003326	0.003324	0.003331	0.003322

Tabela 4.8: $MSE \times 10^6$ para a estimativa da média de r_{10}

Modelo	L	sem antitéticas					com antitéticas				
		PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols
GARCH	4096	0.008201	0.008032	0.008921	0.001267	0.001108	0.006412	0.007135	0.008306	0.006104	0.006103
	16384	0.007102	0.006968	0.006856	0.001208	0.001211	0.004674	0.005679	0.006617	0.006103	0.006103
	65536	0.006696	0.006363	0.006361	0.006107	0.006084	0.006103	0.006103	0.006103	0.006103	0.006103
NGARCH	4096	0.006283	0.005910	0.006718	0.002267	0.002461	0.004694	0.005246	0.006249	0.003726	0.003750
	16384	0.004745	0.004593	0.004526	0.002370	0.002354	0.002731	0.003531	0.004303	0.003713	0.003736
	65536	0.004266	0.003974	0.003970	0.003713	0.003703	0.003692	0.003714	0.003710	0.003704	0.003718

Tabela 4.9: $MSE \times 10^6$ para a estimativa da média de r_{130}

Modelo	L	sem antitéticas					com antitéticas				
		PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols
GARCH	4096	0.007618	0.010128	0.008877	0.006160	0.005907	0.009353	0.009102	0.008527	0.006104	0.006103
	16384	0.006374	0.007817	0.006966	0.006139	0.006143	0.005513	0.006796	0.006622	0.006104	0.006104
	65536	0.005487	0.006502	0.006272	0.006103	0.006102	0.006104	0.006104	0.006104	0.006104	0.006104
NGARCH	4096	0.005459	0.007619	0.006678	0.003896	0.003540	0.007290	0.006889	0.006417	0.003805	0.003726
	16384	0.004118	0.005303	0.004595	0.003759	0.003771	0.003560	0.004502	0.004326	0.003716	0.003720
	65536	0.003270	0.004070	0.003889	0.003724	0.003701	0.003686	0.003721	0.003722	0.003720	0.003734

Tabela 4.10: $MSE \times 10^6$ para a estimativa da média de r_{270}

sem antitéticas											
Modelo	L	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols
GARCH	4096	0.023237	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023236	0.023235
	16384	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235
	65536	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235	0.023235
NGARCH	4096	0.013287	0.013283	0.013282	0.013284	0.013283	0.013283	0.013282	0.013282	0.013282	0.013283
	16384	0.013284	0.013283	0.013282	0.013283	0.013282	0.013283	0.013282	0.013282	0.013283	0.013283
	65536	0.013283	0.013282	0.013282	0.013283	0.013282	0.013282	0.013282	0.013282	0.013283	0.013282

Tabela 4.11: $MSE \times 10^6$ para a a estimativa da variância de r_{10}

sem antitéticas											
Modelo	L	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols
GARCH	4096	0.024414	0.024413	0.024413	0.024414	0.024414	0.024414	0.024413	0.024413	0.024414	0.024414
	16384	0.024413	0.024413	0.024413	0.024413	0.024413	0.024414	0.024413	0.024413	0.024414	0.024414
	65536	0.024413	0.024413	0.024413	0.024413	0.024413	0.024414	0.024413	0.024413	0.024413	0.024413
NGARCH	4096	0.014865	0.014861	0.014861	0.014862	0.014862	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014862
	16384	0.014860	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014862
	65536	0.014860	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861

Tabela 4.12: $MSE \times 10^6$ para a a estimativa da variância de r_{130}

sem antitéticas											
Modelo	L	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols	PRN10	PRN100	PRN1000	Sobol	Sobols
GARCH	4096	0.024415	0.024414	0.024414	0.024415	0.024414	0.024415	0.024414	0.024414	0.024415	0.024414
	16384	0.024415	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414	0.024415	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414
	65536	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414	0.024414
NGARCH	4096	0.014863	0.014862	0.014861	0.014863	0.014861	0.014863	0.014861	0.014861	0.014863	0.014862
	16384	0.014862	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014862	0.014861	0.014861	0.014862	0.014861
	65536	0.014862	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861	0.014861

Tabela 4.13: $MSE \times 10^6$ para a a estimativa da variância de r_{270}

5. Aplicação à avaliação de opções

No capítulo anterior comparamos diferentes métodos de amostragem na simulação de caminhos para o ativo subjacente a uma opção. Neste capítulo iremos descrever os estudos empíricos realizados para avaliar o reflexo sobre o preço de opções Americanas, produzido pela utilização dos métodos alternativos de simulação Quasi-Monte Carlo, assim como o uso de técnicas de redução da variância.

Aplicaremos o método *Least Squares Monte Carlo* para calcular o preço de diversas opções Americanas começando com um caso mais simples com um número reduzido de opções para posteriormente estendermos a um conjunto alargado de opções.

Tanto quanto é do nosso conhecimento, este trabalho desenvolve a análise mais alargada até agora realizada sobre avaliação de opções Americanas em contexto GARCH envolvendo métodos Quasi-Monte Carlo.

5.1 O método *Least Squares Monte Carlo*

O método *Least Squares Monte Carlo* (LSMC), proposto por Longstaff e Schwartz (2001), combina técnicas de simulação com o método dos mínimos quadrados. Embora diversos métodos de simulação já tivessem sido usados no contexto da avaliação de opções, o método LSMC possui inúmeras vantagens: é simples de implementar, converge para o verdadeiro valor da opção e possui grande eficiência computacional (Stentoft, 2013).

A avaliação de opções Americanas não é uma tarefa trivial uma vez que, para além do cálculo do seu valor, é necessário definir uma estratégia de exercício ótimo, isto é, uma estratégia que maximize o seu valor. Assim, em cada momento, o detentor da opção

tem que decidir se a exerce de imediato ou se a deixa ativa. A estratégia de exercício ótima é identificada do seguinte modo: na maturidade, a opção é exercida se estiver *in-the-money* (ITM), e antes da maturidade a decisão de exercer ou não, é tomada comparando o valor do exercício imediato com o valor esperado dos ganhos se a opção permanecer ativa (valor de continuação), exercendo de imediato sempre que o primeiro valor é superior ao segundo. Os autores usaram apenas caminhos onde a opção está ITM para aumentar a eficiência do algoritmo e diminuir o tempo de computação. Este facto foi também comprovado por [Stentoft \(2013\)](#).

Formalmente, o valor de uma opção Americana com maturidade T , é dado por

$$V_0 = \max_{0 \leq \tau \leq T} E_{\mathbb{Q}} [e^{-r\tau} H(\tau, S_{\tau}, C_{\tau})] \quad (5.1)$$

sendo τ um tempo ótimo de paragem que representa o momento em que a opção é exercida, $E_{\mathbb{Q}}[\cdot]$ o valor esperado condicional sob a medida risco neutro¹, S_{τ} o preço do ativo subjacente e H a função *payoff* definida por

$$H(t, S_t, C_t) = \begin{cases} \max(S_t - k, C_t) & \text{para uma Call} \\ \max(k - S_t, C_t) & \text{para uma Put} \end{cases} \quad (5.2)$$

onde C_t é o valor de continuação atual (em t), isto é, o *payoff* esperado se a opção continuar ativa e k é o preço de exercício da opção.

Em cada momento, o detentor da opção deve decidir se exerce ou não a opção, exercendo de imediato se o valor de continuação C_t for inferior ao valor do exercício imediato.

Assumiremos que a opção só pode ser exercida num número finito de oportunidades de exercício $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Estas opções são usualmente designadas por opções Bermudas, correspondendo a uma aproximação da opção Americana.

O processo do subjacente, S , é simulado em L caminhos para os momentos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. O momento ótimo de paragem para cada caminho é obtido começando em T e trabalhando recursivamente para trás, comparando o *payoff* do exercício imediato com o valor de continuação.

No instante final $t_j = T$, o detentor da opção tem a alternativa de exercer a opção, caso ela esteja ITM ou permitir a sua expiração, caso contrário. Assim, neste instante, o

¹Para mais detalhes sobre a avaliação risco neutro de opções Americanas, consulte-se [Cox et al. \(1979\)](#) ou [Bingham e Kiesel \(2013\)](#).

valor de continuação é $C_{t_j=T} = 0$. Em cada instante t_j anterior à maturidade, a estratégia de exercício ótimo reduz-se à comparação entre o valor do exercício imediato, que é conhecido, e o valor de continuação C_{t_j} , que é desconhecido. O valor de continuação é dado pelo valor esperado da opção no momento de exercício seguinte, condicionado pelos preços observados até ao momento

$$C_{t_j} = e^{-r(t_{j+1}-t_j)} E_{\mathbb{Q}} [V_{t_{j+1}}(S_{t_{j+1}}) | \mathcal{F}_{t_j}]. \quad (5.3)$$

Sendo este valor desconhecido, tem que ser estimado por simulação. Longstaff e Schwartz (2001) usaram regressão transversal (*cross-sectional*) sobre os caminhos simulados para estimar C_{t_j} . Por uma questão de simplificação de notação, considere-se $t_j = j$. Assim, as variáveis independentes são representadas pelos preços do subjacente, $S_{1,j}, \dots, S_{L,j}$, e as variáveis dependentes pelos preços da opção no tempo seguinte, $V_{j+1}(S_{1,j+1}), \dots, V_{j+1}(S_{L,j+1})$.

Escolhendo uma base de M funções (multivariadas) $\{\varphi_b(\mathbf{x}_j)\}_{b=1}^M$, onde \mathbf{x}_j é um vetor de variáveis explicativas, $\mathbf{x}_j = (S_{1,j}, \dots, S_{L,j})$, cada uma, função dos preços observados do ativo subjacente até então, podemos aproximar o valor de continuação

$$C_j(S_j) \approx \sum_{b=1}^M \hat{\beta}_{b,j} \varphi_b(\mathbf{x}_j) \quad (5.4)$$

onde os coeficientes $\hat{\beta}_{b,j}$ são obtidos de

$$(\hat{\beta}_{1,j}, \dots, \hat{\beta}_{M,j})^T = (A_j^T A_j)^{-1} A_j^T (y_1, \dots, y_L)^T, \quad j = 1, \dots, N$$

sendo $y_i = e^{-r(t_{j+1}-t_j)} V_{j+1}(S_{i,j+1})$, e o elemento da linha i e coluna b de A_j dado por $\varphi_b(x_{i,j})$, onde $x_{i,j}$ representa a i -ésima componente do vetor \mathbf{x}_j , para $i = 1, \dots, L$ e $b = 1, \dots, M$.

Longstaff e Schwartz (2001) apresentam um exemplo bastante elucidativo onde consideram $\mathbf{x}_j = (S_{1,j}, \dots, S_{L,j})$ e para as funções de base os polinómios de grau menor ou igual a 2, isto é, $\{\varphi_b(x_{i,j})\}_{b=1}^3 = \{1, x_{i,j}, x_{i,j}^2\}$, para $j = 1, \dots, 3$.

A matriz A_j é dada por $A_j = \begin{bmatrix} 1 & S_{1,j} & S_{1,j}^2 \\ 1 & S_{2,j} & S_{2,j}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & S_{8,j} & S_{8,j}^2 \end{bmatrix}$.

Longstaff e Schwartz (2001) indicam os polinómios ponderados de Laguerre como uma possível escolha para as funções base. No entanto, os testes numéricos que realizaram mostraram que polinómios de *Hermite*, polinómios de *Legendre*, séries de *Fourier*, séries trigonométricas ou mesmo simples potências das variáveis-estado também produzem resultados bastante precisos. Quanto ao número de funções da base a considerar, os autores concluíram que basta um pequeno número para aproximar a função esperança condicional com precisão.

Neste trabalho consideramos como variáveis independentes os polinómios do preço e da volatilidade condicional e seus produtos.

5.2 LSMC para opções Americanas baseadas num processo GARCH

Tendo por base o modelo proposto por Duan (1995), Stentoft (2005) mostrou a aplicabilidade do método LSMC na avaliação de opções Americanas quando o ativo subjacente segue um processo GARCH.

Para testar a nossa implementação, começamos por comparar os nossos resultados com os obtidos por Stentoft (2005), Duan e Simonato (2001) e Ritchken e Trevor (1999), para o modelo não linear assimétrico NGARCH.

Além disso, estendemos o trabalho de Stentoft (2005) introduzindo os métodos Quasi-Monte Carlo na avaliação de opções Americanas quando os preços do ativo subjacente são governados por um processo não linear assimétrico, em concreto NGARCH. Longstaff e Schwartz (2001) mencionam que o método LSMC pode ser melhorado com uma abordagem QMC.

Para as sequências de baixa discrepância, usamos as sequências de *Halton*, as sequências de *Sobol*, estas últimas sem e com dois tipos de *scrambling* disponibilizados na *package fOptions* do *R* (Owen e Faure-Tezuca). Consideramos ainda a aplicação de variáveis antitéticas nas diversas simulações.

Para avaliar o desempenho de cada método utilizamos como medidas de erro o erro máximo absoluto (MaxAE), erro absoluto médio (MAE), a raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE) e a raiz quadrada do erro relativo quadrático médio (RMSRE). Representando por V_i o preço *benchmark* da opção i e por \hat{V}_i o preço estimado por cada método, o erro $e_i = \hat{V}_i - V_i$ e o erro relativo $e_{r,i} = \frac{\hat{V}_i - V_i}{V_i}$, as medidas de erro são

definidas por

$$MaxAE = \max \{|e_i|, i = 1, \dots, M\} \quad (5.5)$$

$$MAE = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |e_i| \quad (5.6)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i^2} \quad (5.7)$$

$$RMSRE = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_{r,i}^2} \quad (5.8)$$

Assume-se que a rendibilidade do ativo segue um processo não linear NGARCH(1,1) (Engle e Ng, 1993) com inovações de uma distribuição Normal sob a medida física \mathbb{P}

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) &= r_t = r_f + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha (\epsilon_{t-1} + \gamma \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

em que S_t corresponde ao preço do ativo subjacente no momento t , r_f é taxa isenta de risco, λ pode ser interpretado como o prémio de risco e \mathcal{F}_{t-1} é o conjunto de informações disponíveis até $t-1$. Admite-se que o ativo não paga dividendos.

Da lognormalidade de $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ obtém-se que $E[\frac{S_{t+1}}{S_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = e^{r_f + \lambda \sigma_t}$.

A *locally risk-neutral valuation relationship* (LRNVR) de Duan (1995) assegura que, sob a medida risco neutro \mathbb{Q} , $E_{\mathbb{Q}}[\frac{S_{t+1}}{S_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = e^r$ e a variância condicional não se altera pela mudança de medida de \mathbb{P} para \mathbb{Q} ,

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_{t+1}}{S_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] &= e^r \\ V_{\mathbb{P}} \left[\ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) | \mathcal{F}_{t-1} \right] &= V_{\mathbb{Q}} \left[\ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) | \mathcal{F}_{t-1} \right]. \end{aligned}$$

Estas propriedades permitem que a variância condicional seja observada e estimada sob a medida física \mathbb{P} e a média condicional pode ser substituída pela taxa de juro sem

risco. O modelo resultante sob a medida risco neutro \mathbb{Q} é

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r_t = r_f - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\epsilon_{t-1} + \gamma\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2. \quad (5.10)$$

5.2.1 Comparação com o painel A da tabela 4 de Stentoft (2005)

Neste ponto comparamos a nossa implementação do modelo LSMC avaliando as mesmas opções que [Stentoft \(2005\)](#) avaliou na tabela 4 desse artigo. Essas opções são sobre um ativo cujo rendibilidade segue o processo descrito em (5.9) e os valores dos parâmetros são os mesmos usados por [Duan e Simonato \(2001\)](#), $\omega = 0.00001$, $\beta = 0.8$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = -0.5$, e $\lambda = 0$. Note-se que o artigo de [Stentoft \(2005\)](#) apresenta $\gamma = -0.3$ e $\lambda = 0.2$ incorretamente, uma vez que [Duan e Simonato \(2001\)](#) consideram $\gamma = -0.5$ e $\lambda = 0$.

Tal como [Stentoft \(2005\)](#) os valores da opção reportados resultam de uma média de 100 avaliações usando o algoritmo LSMC proposto por [Longstaff e Schwartz \(2001\)](#), com 20 000 caminhos, números pseudo-aleatórios, e regressões em que as variáveis independentes são polinómios de segundo grau do preço e da volatilidade condicional.

Considera-se a possibilidade de exercício da opção uma vez por dia. A taxa isenta de risco é de 5% (assume-se que um ano tem 365 dias).

Seguindo [Duan e Simonato \(2001\)](#) o valor inicial da variância condicional é o valor da variância não condicional do processo (“under the data generating probability measure P”), ou seja, $\sigma_0^2 = \frac{\omega}{(1-\alpha(1+\gamma^2)-\beta)}$.

No que se segue, “Bench” corresponde ao valor da opção de venda calculado por [Duan e Simonato \(2001\)](#). S2005 corresponde ao valor das opções de venda, calculado por [Stentoft \(2005\)](#).

LSMC corresponde ao valor das opções obtido através da nossa implementação do algoritmo de [Longstaff e Schwartz \(2001\)](#).

Nas várias tabelas apresentadas, mostram-se os resultados de simulação com números pseudo-aleatórios e as sequências de baixa discrepância de Halton e Sobol, assim como

o uso de variáveis antitéticas.

LSMC sem antitéticas

Nas tabela abaixo apresentam-se os resultados da replicação e os erros (MaxAE - erro máximo absoluto, MAE - erro absoluto médio, RMSE - raiz quadrada do erro quadrático médio e RMSRE - raiz quadrada do erro relativo quadrático médio).

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0058844	0.0063890	0.0023	-0.0009	-0.0058844	-0.0049844
30	50	1.1026	1.0971	1.1468477	0.0110492	0.0105	0.0055	-0.0442477	-0.0497477
30	45	0.0742	0.0797	0.0941480	0.0036230	0.0035	-0.0055	-0.0199480	-0.0144480
90	55	5.1861	5.1766	5.2040522	0.0178917	0.0198	0.0095	-0.0179522	-0.0274522
90	50	1.8737	1.8682	1.9066177	0.0211254	0.0161	0.0055	-0.0329177	-0.0384177
90	45	0.4132	0.4261	0.4480308	0.0097552	0.0083	-0.0129	-0.0348308	-0.0219308
270	55	5.9800	5.9424	5.9933216	0.0289636	0.0337	0.0376	-0.0133216	-0.0509216
270	50	3.0463	3.0315	3.0716008	0.0262701	0.0238	0.0148	-0.0253008	-0.0401008
270	45	1.2524	1.2636	1.2900551	0.0178191	0.0159	-0.0112	-0.0376551	-0.0264551

Tabela 5.1: LSMC sem antitéticas

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0442477
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0509216
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0257843
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0304954
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0283724
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0338623
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0956218
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0655798

Tabela 5.2: Medidas de erro LSMC sem antitéticas

LSMC com antitéticas

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0035610	0.0035923	0.0023	-0.0009	-0.0035610	-0.0026610
30	50	1.1026	1.0971	1.1457190	0.0074406	0.0105	0.0055	-0.0431190	-0.0486190
30	45	0.0742	0.0797	0.0942758	0.0035844	0.0035	-0.0055	-0.0200758	-0.0145758
90	55	5.1861	5.1766	5.2061582	0.0140425	0.0198	0.0095	-0.0200582	-0.0295582
90	50	1.8737	1.8682	1.9067875	0.0124839	0.0161	0.0055	-0.0330875	-0.0385875
90	45	0.4132	0.4261	0.4494195	0.0087031	0.0083	-0.0129	-0.0362195	-0.0233195
270	55	5.9800	5.9424	5.9861626	0.0194273	0.0337	0.0376	-0.0061626	-0.0437626
270	50	3.0463	3.0315	3.0675882	0.0172151	0.0238	0.0148	-0.0212882	-0.0360882
270	45	1.2524	1.2636	1.2879524	0.0166509	0.0159	-0.0112	-0.0355524	-0.0243524

Tabela 5.3: LSMC com antitéticas

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0431190
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0486190
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0243471
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0290582
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0275662
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0321462
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0963792
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0661918

Tabela 5.4: Medidas de erro LSMC com antitéticas

LSMC com Halton LDS

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0000000	0.0069845	0.0023	-0.0009	0.0000000	0.0009000
30	50	1.1026	1.0971	1.1384466	0.0106460	0.0105	0.0055	-0.0358466	-0.0413466
30	45	0.0742	0.0797	0.0968386	0.0054761	0.0035	-0.0055	-0.0226386	-0.0171386
90	55	5.1861	5.1766	5.3296679	0.0191005	0.0198	0.0095	-0.1435679	-0.1530679
90	50	1.8737	1.8682	1.8483276	0.0150629	0.0161	0.0055	0.0253724	0.0198724

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
90	45	0.4132	0.4261	0.4229158	0.0160985	0.0083	-0.0129	-0.0097158	0.0031842
270	55	5.9800	5.9424	5.6990230	0.0242599	0.0337	0.0376	0.2809770	0.2433770
270	50	3.0463	3.0315	2.5620615	0.0297359	0.0238	0.0148	0.4842385	0.4694385
270	45	1.2524	1.2636	1.3065310	0.0390429	0.0159	-0.0112	-0.0541310	-0.0429310

Tabela 5.5: LSMC com Halton

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.4842385
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.4694385
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.1173875
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.1101396
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.1942257
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.1847782
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.1178470
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0916011

Tabela 5.6: Medidas de erro LSMC com Halton

LSMC com Halton LDS e antitéticas

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0075205	0.0086158	0.0023	-0.0009	-0.0075205	-0.0066205
30	50	1.1026	1.0971	1.1258260	0.0105844	0.0105	0.0055	-0.0232260	-0.0287260
30	45	0.0742	0.0797	0.0814329	0.0052106	0.0035	-0.0055	-0.0072329	-0.0017329
90	55	5.1861	5.1766	5.4708637	0.0212904	0.0198	0.0095	-0.2847637	-0.2942637
90	50	1.8737	1.8682	1.9419549	0.0171401	0.0161	0.0055	-0.0682549	-0.0737549
90	45	0.4132	0.4261	0.4114343	0.0159674	0.0083	-0.0129	0.0017657	0.0146657
270	55	5.9800	5.9424	14.2907951	0.1157216	0.0337	0.0376	-8.3107951	-8.3483951
270	50	3.0463	3.0315	11.7305915	0.1048861	0.0238	0.0148	-8.6842915	-8.6990915
270	45	1.2524	1.2636	9.3714658	0.0939067	0.0159	-0.0112	-8.1190658	-8.1078658

Tabela 5.7: LSMC com Halton e antitéticas

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	8.6842915
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	8.6990915
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	2.8341018
$MAE_{S2005,LSMC}$	2.8416796
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	4.8361126
$RMSE_{S2005,LSMC}$	4.8442463
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	2.4059971
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	2.3894789

Tabela 5.8: Medidas de erro LSMC com Halton e antitéticas

LSMC com Sobol LDS

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0000000	0.0067362	0.0023	- 0.0009	0.0000000	0.0009000
30	50	1.1026	1.0971	1.1358905	0.0103998	0.0105	0.0055	-0.0332905	-0.0387905
30	45	0.0742	0.0797	0.0869123	0.0033557	0.0035	-0.0055	-0.0127123	-0.0072123
90	55	5.1861	5.1766	5.2326239	0.0187471	0.0198	0.0095	-0.0465239	-0.0560239
90	50	1.8737	1.8682	1.8993838	0.0164761	0.0161	0.0055	-0.0256838	-0.0311838
90	45	0.4132	0.4261	0.4272708	0.0086138	0.0083	-0.0129	-0.0140708	-0.0011708
270	55	5.9800	5.9424	6.0098144	0.0280333	0.0337	0.0376	-0.0298144	-0.0674144
270	50	3.0463	3.0315	3.0676437	0.0255839	0.0238	0.0148	-0.0213437	-0.0361437
270	45	1.2524	1.2636	1.2758721	0.0173128	0.0159	-0.0112	-0.0234721	-0.0122721

Tabela 5.9: LSMC com Sobol

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0465239
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0674144
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0229902

$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0279013
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0262199
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0360119
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0597372
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0336775

Tabela 5.10: Medidas de erro LSMC com Sobol

LSMC com Sobol LDS e Owen *scrambling*

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0000000	0.0063998	0.0023	-0.0009	0.0000000	0.0009000
30	50	1.1026	1.0971	1.1429584	0.0110615	0.0105	0.0055	-0.0403584	-0.0458584
30	45	0.0742	0.0797	0.0928582	0.0035360	0.0035	-0.0055	-0.0186582	-0.0131582
90	55	5.1861	5.1766	5.2124793	0.0189213	0.0198	0.0095	-0.0263793	-0.0358793
90	50	1.8737	1.8682	1.9067537	0.0169517	0.0161	0.0055	-0.0330537	-0.0385537
90	45	0.4132	0.4261	0.4353904	0.0086809	0.0083	-0.0129	-0.0221904	-0.0092904
270	55	5.9800	5.9424	5.9803423	0.0294183	0.0337	0.0376	-0.0003423	-0.0379423
270	50	3.0463	3.0315	3.0700675	0.0254937	0.0238	0.0148	-0.0237675	-0.0385675
270	45	1.2524	1.2636	1.2811964	0.0173848	0.0159	-0.0112	-0.0287964	-0.0175964

Tabela 5.11: LSMC com Sobol e Owen *scrambling*

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0403584
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0458584
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0215051
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0264162
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0250599
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0305026
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0871664

$$\overline{RMSRE_{S2005,LSMC}} \quad 0.0580709$$

Tabela 5.12: Medidas de erro LSMC com Sobol e Owen *scrambling*

LSMC com Sobol LDS e Faure-Tezuka *scrambling*

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0053744	0.0069913	0.0023	-0.0009	-0.0053744	-0.0044744
30	50	1.1026	1.0971	1.1472549	0.0110446	0.0105	0.0055	-0.0446549	-0.0501549
30	45	0.0742	0.0797	0.0923052	0.0036427	0.0035	-0.0055	-0.0181052	-0.0126052
90	55	5.1861	5.1766	5.2047138	0.0183069	0.0198	0.0095	-0.0186138	-0.0281138
90	50	1.8737	1.8682	1.8943669	0.0168764	0.0161	0.0055	-0.0206669	-0.0261669
90	45	0.4132	0.4261	0.4396694	0.0089879	0.0083	-0.0129	-0.0264694	-0.0135694
270	55	5.9800	5.9424	5.9667571	0.0298088	0.0337	0.0376	0.0132429	-0.0243571
270	50	3.0463	3.0315	3.0530894	0.0259376	0.0238	0.0148	-0.0067894	-0.0215894
270	45	1.2524	1.2636	1.2840771	0.0179400	0.0159	-0.0112	-0.0316771	-0.0204771

Tabela 5.13: LSMC com Sobol e Faure-Tezuka *scrambling*

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0446549
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0501549
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0206216
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0223898
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0236875
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0254566
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0856790
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0564454

Tabela 5.14: Medidas de erro LSMC com Sobol e Faure-Tezuka *scrambling*

LSMC com Sobol LDS e antitéticas

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0040290	0.0065666	0.0023	-0.0009	-0.0040290	-0.0031290
30	50	1.1026	1.0971	1.1302654	0.0106414	0.0105	0.0055	-0.0276654	-0.0331654
30	45	0.0742	0.0797	0.0874696	0.0034294	0.0035	-0.0055	-0.0132696	-0.0077696
90	55	5.1861	5.1766	5.2310538	0.0177924	0.0198	0.0095	-0.0449538	-0.0544538
90	50	1.8737	1.8682	1.8901748	0.0162487	0.0161	0.0055	-0.0164748	-0.0219748
90	45	0.4132	0.4261	0.4343656	0.0089160	0.0083	-0.0129	-0.0211656	-0.0082656
270	55	5.9800	5.9424	6.0120326	0.0290746	0.0337	0.0376	-0.0320326	-0.0696326
270	50	3.0463	3.0315	3.0640754	0.0254668	0.0238	0.0148	-0.0177754	-0.0325754
270	45	1.2524	1.2636	1.2872747	0.0179434	0.0159	-0.0112	-0.0348747	-0.0236747

Tabela 5.15: LSMC com Sobol e antitéticas

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0449538
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0696326
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0235823
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0282934
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0263655
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0352087
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0634447
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0359736

Tabela 5.16: Medidas de erro LSMC com Sobol e antitéticas

LSMC com Sobol LDS, antitéticas e Owen *scrambling*

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0000000	0.0063487	0.0023	-0.0009	0.0000000	0.0009000
30	50	1.1026	1.0971	1.1450737	0.0110357	0.0105	0.0055	-0.0424737	-0.0479737
30	45	0.0742	0.0797	0.0931908	0.0035542	0.0035	-0.0055	-0.0189908	-0.0134908
90	55	5.1861	5.1766	5.2012942	0.0185134	0.0198	0.0095	-0.0151942	-0.0246942

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
90	50	1.8737	1.8682	1.9119275	0.0169452	0.0161	0.0055	-0.0382275	-0.0437275
90	45	0.4132	0.4261	0.4372608	0.0086593	0.0083	-0.0129	-0.0240608	-0.0111608
270	55	5.9800	5.9424	5.9912010	0.0304713	0.0337	0.0376	-0.0112010	-0.0488010
270	50	3.0463	3.0315	3.0593349	0.0253467	0.0238	0.0148	-0.0130349	-0.0278349
270	45	1.2524	1.2636	1.2860289	0.0171767	0.0159	-0.0112	-0.0336289	-0.0224289

Tabela 5.17: LSMC com Sobol, antitéticas e Owen *scrambling*

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0424737
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0488010
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0218680
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0267791
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0255214
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0312519
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0891616
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0598962

Tabela 5.18: Medidas de erro LSMC com Sobol, antitéticas e Owen *scrambling***LSMC com Sobol LDS, antitéticas e Faure-Tezuka *scrambling***

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
30	55	5.0000	5.0009	5.0000000	0.0066783	0.0023	-0.0009	0.0000000	0.0009000
30	50	1.1026	1.0971	1.1488777	0.0112595	0.0105	0.0055	-0.0462777	-0.0517777
30	45	0.0742	0.0797	0.0951006	0.0035030	0.0035	-0.0055	-0.0209006	-0.0154006
90	55	5.1861	5.1766	5.2188294	0.0189018	0.0198	0.0095	-0.0327294	-0.0422294
90	50	1.8737	1.8682	1.8715649	0.0163837	0.0161	0.0055	0.0021351	-0.0033649
90	45	0.4132	0.4261	0.4437418	0.0089007	0.0083	-0.0129	-0.0305418	-0.0176418
270	55	5.9800	5.9424	5.9593885	0.0292450	0.0337	0.0376	0.0206115	-0.0169885
270	50	3.0463	3.0315	3.0351403	0.0259349	0.0238	0.0148	0.0111597	-0.0036403

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
270	45	1.2524	1.2636	1.2961613	0.0175909	0.0159	-0.0112	-0.0437613	-0.0325613

Tabela 5.19: LSMC com Sobol, antitéticas e Faure-Tezuka *scrambling*

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0376000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0462777
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0517777
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0114889
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0231241
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0205005
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0152987
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0279910
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0266394
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0271805
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0988016
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0683323

Tabela 5.20: Medidas de erro LSMC com Sobol, antitéticas e Faure-Tezuka *scrambling*

Neste ponto, mais do que comparar métodos pretendemos testar a nossa implementação. Os resultados obtidos estão próximos dos valores que usamos para referência. Analisando as medidas de erro consideradas, podemos concluir que o uso de variáveis antitéticas com PRN melhoram ligeiramente os resultados. As sequências de *Halton* produzem preços mais afastados do *benchmark* do que os PRN, principalmente quando combinados com variáveis antitéticas. Quando não se consideram variáveis antitéticas, as sequências que apresentam melhor desempenho são as de *Sobol* com *Faure-Tezuka scrambling*. Se se consideram variáveis antitéticas, a escolha recai sobre as sequências de *Sobol* com *Owen scrambling*.

5.2.2 Comparação com o painel B da tabela 4 de Stentoft (2005)

No painel B os parâmetros são os usados por Ritchken e Trevor (1999), $\omega = 6.575 \times 10^{-6}$, $\beta = 0.9$, $\alpha = 0.04$, $\gamma = 0$, e $\lambda = 0$. A taxa isenta de risco é de 10% (assume-se que um ano tem 365 dias). O preço de exercício de todas as opções é de 100.

A tabela abaixo apresenta os resultados da replicação. “Bench” corresponde ao valor da opção de venda, para esses parâmetros, de acordo com Ritchken e Trevor (1999). S2005 corresponde ao valor das opções de venda, calculado por Stentoft (2005). LSMC corresponde ao valor das opções obtido através da nossa implementação do algoritmo de Longstaffe e Schwartz (2001). Tal como Stentoft (2005) os valores reportados do valor da opção resultam de uma média de 100 avaliações usando o algoritmo LSMC proposto por Longstaffe e Schwartz (2001), com 20 000 caminhos, números pseudo-aleatórios, e regressões em que as variáveis independentes são polinómios de segundo grau do preço e a volatilidade condicional. Considera-se a possibilidade de exercício da opção uma vez por dia.

LSMC sem antitéticas

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5619297	0.0055552	0.0065	-0.003	-0.0059297	-0.0030297
10	100	1.192	1.1930	1.1957773	0.0113855	0.0110	-0.001	-0.0037773	-0.0027773
50	100	2.398	2.3984	2.4065906	0.0188120	0.0234	0.000	-0.0085906	-0.0081906
100	100	3.143	3.1443	3.1538407	0.0244911	0.0273	-0.001	-0.0108407	-0.0095407

Tabela 5.21: LSMC sem antitéticas

Os deltas reportam as diferenças entre as estimativas obtidas por dois métodos diferentes.

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0108407
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0095407
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0072846
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0058846
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778

$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0077580
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0066144
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0060933
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0037307

Tabela 5.22: Medidas de erro LSMC sem antitéticas

LSMC com antitéticas

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5614437	0.0049796	0.0065	-0.003	-0.0054437	-0.0025437
10	100	1.192	1.1930	1.1938951	0.0065818	0.0110	-0.001	-0.0018951	-0.0008951
50	100	2.398	2.3984	2.4059486	0.0153068	0.0234	0.000	-0.0079486	-0.0075486
100	100	3.143	3.1443	3.1538506	0.0184615	0.0273	-0.001	-0.0108506	-0.0095506

Tabela 5.23: LSMC com antitéticas

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0108506
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0095506
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0065345
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0051345
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0073168
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0062343
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0055067
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0031784

Tabela 5.24: Medidas de erro LSMC com antitéticas

À semelhança do que fizemos para a secção anterior, apresentam-se de seguida alguns

resultados onde foram usadas as sequências de baixa discrepância de *Halton* e *Sobol*. Usamos as sequências randomizadas de *Sobol* com dois tipos de randomização usadas na secção anterior.

LSMC com Halton LDS

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5608788	0.0057338	0.0065	-0.003	-0.0048788	-0.0019788
10	100	1.192	1.1930	1.2049886	0.0112249	0.0110	-0.001	-0.0129886	-0.0119886
50	100	2.398	2.3984	2.4508910	0.0227225	0.0234	0.000	-0.0528910	-0.0524910
100	100	3.143	3.1443	3.2388809	0.0341021	0.0273	-0.001	-0.0958809	-0.0945809

Tabela 5.25: LSMC com Halton

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0958809
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0945809
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0416598
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0402598
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0551886
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0544254
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0200801
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0193476

LSMC com Halton LDS e antitéticas

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5604868	0.0057674	0.0065	-0.003	-0.0044868	-0.0015868
10	100	1.192	1.1930	1.2048197	0.0114062	0.0110	-0.001	-0.0128197	-0.0118197
50	100	2.398	2.3984	2.3577775	0.0211379	0.0234	0.000	0.0402225	0.0406225
100	100	3.143	3.1443	3.1451991	0.0332693	0.0273	-0.001	-0.0021991	-0.0008991

Tabela 5.27: LSMC com Halton e antitéticas

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0402225
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0406225
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0149320
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0137320
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0212553
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0211732
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0107543
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0099143

LSMC com Sobol LDS

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5608777	0.0057194	0.0065	-0.003	-0.0048777	-0.0019777
10	100	1.192	1.1930	1.1996401	0.0112215	0.0110	-0.001	-0.0076401	-0.0066401
50	100	2.398	2.3984	2.3927857	0.0206726	0.0234	0.000	0.0052143	0.0056143
100	100	3.143	3.1443	3.1505177	0.0264003	0.0273	-0.001	-0.0075177	-0.0062177

Tabela 5.29: LSMC com Sobol

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0076401
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0066401
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0063125
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0051125
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0064395
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0054356
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0056678

$$\underline{RMSRE_{S2005,LSMC} \quad 0.0036363}$$

LSMC com Sobol LDS e Owen *scrambling*

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5608834	0.0057103	0.0065	-0.003	-0.0048834	-0.0019834
10	100	1.192	1.1930	1.2001667	0.0113366	0.0110	-0.001	-0.0081667	-0.0071667
50	100	2.398	2.3984	2.4086513	0.0214603	0.0234	0.000	-0.0106513	-0.0102513
100	100	3.143	3.1443	3.1500670	0.0271683	0.0273	-0.001	-0.0070670	-0.0057670

Tabela 5.31: LSMC com Sobol e Owen *scrambling*

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0106513
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0102513
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0076921
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0062921
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0079677
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0069578
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0061006
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0041927

LSMC com Sobol LDS e Faure-Tezuka *scrambling*

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5607464	0.0057743	0.0065	-0.003	-0.0047464	-0.0018464
10	100	1.192	1.1930	1.1918033	0.0116512	0.0110	-0.001	0.0001967	0.0011967
50	100	2.398	2.3984	2.4051529	0.0212303	0.0234	0.000	-0.0071529	-0.0067529
100	100	3.143	3.1443	3.1454697	0.0273426	0.0273	-0.001	-0.0024697	-0.0011697

Tabela 5.33: LSMC com Sobol e Faure-Tezuka *scrambling*

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0071529
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0067529
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0036414
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0027414
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0044674
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0035990
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0045392
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0022353

LSMC com Sobol LDS e antitéticas

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5601288	0.0057738	0.0065	-0.003	-0.0041288	-0.0012288
10	100	1.192	1.1930	1.2042462	0.0112912	0.0110	-0.001	-0.0122462	-0.0112462
50	100	2.398	2.3984	2.3799378	0.0206358	0.0234	0.000	0.0180622	0.0184622
100	100	3.143	3.1443	3.1447587	0.0263783	0.0273	-0.001	-0.0017587	-0.0004587

Tabela 5.35: LSMC com Sobol e antitéticas

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0180622
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0184622
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0090490
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0078490
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0111395
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0108288
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0073780

$$\underline{RMSRE_{S2005,LSMC} \quad 0.0061841}$$

LSMC com Sobol LDS, antitéticas e Owen *scrambling*

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5598951	0.0056679	0.0065	-0.003	-0.0038951	-0.0009951
10	100	1.192	1.1930	1.1921125	0.0111118	0.0110	-0.001	-0.0001125	0.0008875
50	100	2.398	2.3984	2.4205447	0.0215098	0.0234	0.000	-0.0225447	-0.0221447
100	100	3.143	3.1443	3.1723817	0.0271915	0.0273	-0.001	-0.0293817	-0.0280817

Tabela 5.37: LSMC com Sobol, antitéticas e Owen *scrambling*

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0293817
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0280817
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0139835
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0130273
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0186194
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0178938
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0074978
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0064949

LSMC com Sobol LDS, antitéticas e Faure-Tezuka *scrambling*

T	K	Bench	S2005	LSMC	LSMC se	S2005 se	$\Delta_{Bench-S2005}$	$\Delta_{Bench-LSMC}$	$\Delta_{LSMC-S2005}$
2	100	0.556	0.5589	0.5604043	0.0057081	0.0065	-0.003	-0.0044043	-0.0015043
10	100	1.192	1.1930	1.1934994	0.0114508	0.0110	-0.001	-0.0014994	-0.0004994
50	100	2.398	2.3984	2.4058797	0.0212171	0.0234	0.000	-0.0078797	-0.0074797
100	100	3.143	3.1443	3.1119854	0.0263213	0.0273	-0.001	0.0310146	0.0323146

Tabela 5.39: LSMC com Sobol, antitéticas e Faure-Tezuka *scrambling*

$MaxAE_{Bench,S2005}$	0.0029000
$MaxAE_{Bench,LSMC}$	0.0310146
$MaxAE_{S2005,LSMC}$	0.0323146
$MAE_{Bench,S2005}$	0.0014000
$MAE_{Bench,LSMC}$	0.0111995
$MAE_{S2005,LSMC}$	0.0104495
$RMSE_{Bench,S2005}$	0.0016778
$RMSE_{Bench,LSMC}$	0.0161682
$RMSE_{S2005,LSMC}$	0.0166034
$RMSRE_{Bench,S2005}$	0.0026508
$RMSRE_{Bench,LSMC}$	0.0065670
$RMSRE_{S2005,LSMC}$	0.0055400

Analisando as várias medidas e comparando os vários tipos de métodos usados, podemos concluir que, de um modo geral, os menores erros são obtidos no caso dos PRN.

5.2.3 Aplicação a um conjunto alargado de opções

Nas secções anteriores aplicamos o método LSMC a um reduzido número de opções. À semelhança do que foi feito por [Stentoft \(2005\)](#), comparamos os resultados obtidos com a nossa implementação do método LSMC com os obtidos por [Duan e Simonato \(2001\)](#) e [Ritchken e Trevor \(1999\)](#) para o modelo não linear assimétrico NGARCH. Nesta secção iremos ampliar o nosso estudo comparando os diferentes métodos de amostragem e a sua convergência para o valor correto de uma opção americana criando uma amostra com um conjunto alargado de opções.

As opções consideradas serão as seguintes:

- Preços de exercício de 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115
- Maturidades de 2, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80, 90, 120, 180, 240, 270 dias
- Preço do ativo subjacente: 100

Para este conjunto de opções vamos considerar ainda dois processos GARCH diferentes, um usado por [Duan e Simonato \(2001\)](#): $\omega = 0.00001$, $\beta = 0.8$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = -0.5$ e $\lambda = 0$. E um outro conjunto de parâmetros usado por [Ritchken e Trevor \(1999\)](#):

$\omega = 0.00001$, $\beta = 0.9$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0$ e $\lambda = 0$. À semelhança desses autores assume-se que o ativo subjacente não proporciona qualquer dividendo ao longo da vida da opção. A taxa isenta de risco é de 10% (assume-se que um ano tem 365 dias). Ficamos assim com um conjunto de 196 opções.

Como não existe nenhuma forma de obtermos um valor exato dessas opções, vamos considerar como o valor padrão de comparação (*benchmark*) o valor obtido através de simulação de LSMC proposto por Longstaff e Schwartz (2001), com 1 000 000 caminhos, números pseudo-aleatórios e regressões em que as variáveis independentes são polinómios de quinto grau do preço e a volatilidade condicional e seus produtos. Considera-se a possibilidade de exercício da opção uma vez por dia.

Tendo em conta que existe a possibilidade da regressão pelo método dos mínimos quadrados produzir resultados incorretos, no caso de haver uma matriz quase singular, vamos comparar os resultados obtidos com o método *single value decomposition* (SVD). Vamos também produzir números aleatórios com variáveis antitéticas e finalmente incluir o método de redução da variância proposto por Duan e Simonato (1998) (DS), que garante a propriedade de martingala.

Para cada um dos métodos são considerados os seguintes números de caminhos: 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536 e 131072 e polinómios de grau 2 a 5. Obtemos assim $8 \times 5 \times 2^3 \times 4 = 1280$ conjuntos de 196 opções para avaliar, perfazendo um total de 250 880 opções.

As opções avaliadas são analisadas para diferentes grupos de amostras. Num caso, incluímos todas as opções, isto é, opções com qualquer maturidade no conjunto considerado de maturidades e qualquer preço. Noutro caso, consideramos apenas opções com preço superior a 0.5. Em ambos os casos, analisamos em separado as opções com maturidades até 20 dias, maturidades de 30, 40 e 60 dias, maturidades de 80, 90 e 120 dias e maturidades 180, 240 e 270 dias.

Foram usadas as seguintes medidas de erro: MaxAE (erro máximo absoluto), MAE (erro absoluto médio), RMSE (raiz quadrada do erro quadrático médio), RMSRE (raiz quadrada do erro relativo quadrático médio). No cálculo de RMSRE incluímos apenas opções com preço estimado maior ou igual a 0.5, como é recomendado por Broadie e Detemple (1997).

No Apêndice B.2 encontram-se os gráficos correspondentes a este estudo.

Para analisar a convergência dos métodos foi utilizado o seguinte modelo de regressão:

$$\begin{aligned} \log(\text{Medida}) = & \beta_0 + \beta_1 \times \log(\text{caminhos}) + \beta_2 \times \log(\text{grau}) + \beta_3 \times D_{\text{antitética}} + \\ & + \beta_4 \times D_{\text{sobol}} + \beta_5 \times D_{\text{svd}} + \beta_6 \times D_{\text{Owen}} + \beta_7 \times D_{\text{Faure-Tezuka}} + \\ & + \beta_8 \times D_{\text{Owen+Faure-Tezuka}} + \beta_9 \times D_{\text{ds}} + \epsilon \end{aligned}$$

onde “Medida” representa as medidas de erro consideradas: “MaxAE”, “MAE”, “RMSE” e “RMSRE”.

Todas as opções

Quando consideramos todas as opções, podemos observar que os coeficientes relativos à variável DS não são significativos. Assim, sugere-se a não inclusão desta variável quando se analisam opções deste tipo.

Os menores erros são obtidos com as sequências de *Sobol*, com SVD e variáveis antitéticas, principalmente quando se considera um número reduzido de caminhos. Frequentemente os polinómios de menor grau conduzem aos melhores resultados.

Nas opções com maturidade até 20 dias, é interessante observar que quando se aumenta o número de caminhos, frequentemente os polinómios de grau mais elevado aumentam os erros. Nota-se a ausência de significância do coeficiente da variável “log(grau)” na tabela 5.42 para “log(grau)” em “log(MAE)”.

Também para estas opções o uso de SVD melhora os resultados relativamente a OLS (*Ordinary Least Squares*) e as sequências de baixa discrepância são preferíveis aos PRN. O uso de variáveis antitéticas é recomendado, assim como o *scrambling* das sequências de *Sobol*.

Nas opções com maturidade superior a 20 dias, os coeficientes da variável “ds” nas várias regressões não apresentam valores significativos. O mesmo acontecendo com a variável “antitéticas” no caso das opções com maturidade superior a 180 dias.

O uso de SVD em vez de OLS também permite obter erros menores. A redução nos erros provocada pela substituição dos PRN pelas sequências de *Sobol*, é mais expressiva para as maturidades mais elevadas.

	<i>Variáveis dependentes</i>		
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)
	(1)	(2)	(3)
log(caminhos)	−0.662*** (0.004)	−0.725*** (0.003)	−0.706*** (0.003)
log(graui)	0.215*** (0.016)	0.151*** (0.015)	0.187*** (0.015)
antitética	−0.017 (0.011)	−0.033*** (0.010)	−0.029*** (0.010)
sobol	0.128*** (0.018)	0.122*** (0.016)	0.174*** (0.016)
svd	−0.154*** (0.011)	−0.183*** (0.010)	−0.182*** (0.010)
Owen scrambling	−0.305*** (0.018)	−0.309*** (0.016)	−0.326*** (0.016)
Faure-Tezuka scrambling	−0.349*** (0.018)	−0.393*** (0.016)	−0.405*** (0.016)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	−0.166*** (0.018)	−0.187*** (0.016)	−0.212*** (0.016)
ds	−0.017 (0.011)	−0.002 (0.010)	−0.004 (0.010)
Constante	4.404*** (0.041)	3.281*** (0.038)	3.518*** (0.037)
Observações	1,280	1,280	1,280
R ²	0.966	0.977	0.976
R ² Ajustado	0.966	0.976	0.976
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.199	0.181	0.178
F Statistic (df = 9; 1270)	4,052.536***	5,875.836***	5,794.012***
<i>Nota:</i> *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01			

Tabela 5.41: Todas as opções

	<i>Variável dependente:</i>		
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)
	(1)	(2)	(3)
log(caminhos)	−0.600*** (0.007)	−0.682*** (0.006)	−0.638*** (0.006)
log(graú)	0.237*** (0.032)	0.028 (0.026)	0.149*** (0.027)
antitética	−0.088*** (0.022)	−0.082*** (0.018)	−0.092*** (0.019)
sobol	−0.207*** (0.035)	−0.198*** (0.029)	−0.222*** (0.030)
svd	−0.286*** (0.022)	−0.167*** (0.018)	−0.237*** (0.019)
Owen scrambling	−0.219*** (0.035)	−0.393*** (0.029)	−0.266*** (0.030)
Faure-Tezuka scrambling	−0.184*** (0.035)	−0.341*** (0.029)	−0.233*** (0.030)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	−0.215*** (0.035)	−0.405*** (0.029)	−0.294*** (0.030)
ds	−0.027 (0.022)	−0.021 (0.018)	−0.019 (0.019)
constante	2.633*** (0.082)	1.480*** (0.067)	1.670*** (0.070)
Observações	1,280	1,280	1,280
R ²	0.862	0.923	0.907
R ² Ajustado	0.861	0.922	0.906
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.395	0.324	0.336
F Statistic (df = 9; 1270)	881.749***	1,685.600***	1,370.753***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.42: Opções com até 20 dias para a maturidade

	<i>Variável dependente:</i>		
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)
	(1)	(2)	(3)
log(caminhos)	-0.636*** (0.004)	-0.721*** (0.004)	-0.687*** (0.004)
log(graup)	0.145*** (0.018)	0.037** (0.018)	0.074*** (0.016)
antitética	-0.078*** (0.012)	-0.108*** (0.012)	-0.096*** (0.011)
sobol	0.077*** (0.020)	0.079*** (0.019)	0.089*** (0.018)
svd	-0.133*** (0.012)	-0.127*** (0.012)	-0.132*** (0.011)
Owen scrambling	-0.356*** (0.020)	-0.340*** (0.019)	-0.346*** (0.018)
Faure-Tezuka scrambling	-0.325*** (0.020)	-0.352*** (0.019)	-0.344*** (0.018)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	-0.342*** (0.020)	-0.380*** (0.019)	-0.374*** (0.018)
ds	-0.002 (0.012)	-0.006 (0.012)	-0.007 (0.011)
Constant	3.481*** (0.046)	3.037*** (0.045)	3.035*** (0.042)
Observações	1,280	1,280	1,280
R ²	0.955	0.966	0.968
R ² Ajustado	0.955	0.966	0.968
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.222	0.217	0.202
F Statistic (df = 9; 1270)	3,024.814***	4,067.989***	4,272.307***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.43: Opções com 30, 40 e 60 dias para a maturidade

	<i>Dependent variable:</i>		
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)
	(1)	(2)	(3)
log(caminhos)	−0.659*** (0.004)	−0.723*** (0.004)	−0.704*** (0.003)
log(graup)	0.198*** (0.019)	0.128*** (0.017)	0.155*** (0.016)
antitética	−0.045*** (0.013)	−0.025** (0.011)	−0.035*** (0.011)
sobol	0.127*** (0.021)	0.097*** (0.018)	0.159*** (0.017)
svd	−0.120*** (0.013)	−0.152*** (0.011)	−0.144*** (0.011)
Owen scrambling	−0.397*** (0.021)	−0.369*** (0.018)	−0.400*** (0.017)
Faure-Tezuka scrambling	−0.323*** (0.021)	−0.384*** (0.018)	−0.415*** (0.017)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	−0.282*** (0.021)	−0.165*** (0.018)	−0.243*** (0.017)
ds	−0.025* (0.013)	−0.011 (0.011)	−0.014 (0.011)
constante	4.068*** (0.048)	3.583*** (0.042)	3.620*** (0.040)
Observações	1,280	1,280	1,280
R ²	0.955	0.970	0.972
R ² Ajustado	0.954	0.970	0.972
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.232	0.205	0.193
F Statistic (df = 9; 1270)	2,974.891***	4,564.875***	4,904.217***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.44: Opções com 80, 90 e 120 dias para a maturidade

	<i>Dependent variable:</i>		
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)
	(1)	(2)	(3)
log(caminhos)	-0.668*** (0.004)	-0.735*** (0.004)	-0.715*** (0.004)
log(graú)	0.215*** (0.017)	0.197*** (0.018)	0.202*** (0.017)
antitética	-0.015 (0.011)	-0.012 (0.012)	-0.016 (0.011)
sobol	0.145*** (0.018)	0.192*** (0.020)	0.205*** (0.018)
svd	-0.150*** (0.011)	-0.213*** (0.012)	-0.196*** (0.011)
Owen scrambling	-0.308*** (0.018)	-0.261*** (0.020)	-0.300*** (0.018)
Faure-Tezuka scrambling	-0.383*** (0.018)	-0.421*** (0.020)	-0.427*** (0.018)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	-0.174*** (0.018)	-0.129*** (0.020)	-0.188*** (0.018)
ds	-0.010 (0.011)	0.008 (0.012)	0.003 (0.011)
constante	4.433*** (0.042)	4.103*** (0.046)	4.098*** (0.043)
Observações	1,280	1,280	1,280
R ²	0.965	0.966	0.969
R ² Ajustado	0.965	0.966	0.969
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.204	0.223	0.205
F Statistic (df = 9; 1270)	3,929.713***	3,987.895***	4,458.343***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.45: Opções com 180, 240 e 270 dias para a maturidade

Amostra de opções com um preço superior a 0.5

Quando incluímos na amostra apenas opções com preço superior a 0.5, à semelhança do que foi anteriormente observado, os coeficientes da variável “ds” não apresentam valores estatisticamente significativos. As variáveis com maior peso são “log(caminhos)” e “Faure-Tezuca scrambling”

Nas opções com maturidade até 20 dias, conjugando as sequências de *Sobol* com variáveis antitéticas e SVD obtém-se um decréscimo bastante rápido com o aumento de caminhos.

Para opções com maturidades mais alargadas, realça-se a importância de usar sequências randomizadas.

	<i>Variável independente:</i>			
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)	log(RMSRE)
	(1)	(2)	(3)	(4)
log(caminhos)	-0.662*** (0.004)	-0.733*** (0.003)	-0.708*** (0.003)	-0.623*** (0.004)
log(graú)	0.215*** (0.016)	0.153*** (0.015)	0.189*** (0.015)	0.078*** (0.017)
antitética	-0.017 (0.011)	-0.032*** (0.010)	-0.029*** (0.010)	0.054*** (0.012)
sobol	0.128*** (0.018)	0.120*** (0.017)	0.176*** (0.016)	-0.240*** (0.019)
svd	-0.154*** (0.011)	-0.185*** (0.010)	-0.183*** (0.010)	-0.162*** (0.012)
Owen scrambling	-0.305*** (0.018)	-0.293*** (0.017)	-0.325*** (0.016)	-0.107*** (0.019)
Faure-Tezuka scrambling	-0.349*** (0.018)	-0.386*** (0.017)	-0.405*** (0.016)	-0.206*** (0.019)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	-0.166*** (0.018)	-0.181*** (0.017)	-0.214*** (0.016)	0.309*** (0.019)
ds	-0.017 (0.011)	-0.002 (0.010)	-0.004 (0.010)	0.004 (0.012)
constante	4.404*** (0.041)	3.587*** (0.039)	3.664*** (0.037)	1.912*** (0.044)
Observações	1,280	1,280	1,280	1,280
R ²	0.966	0.976	0.976	0.959
R ² Ajustado	0.966	0.975	0.976	0.958
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.199	0.187	0.179	0.211
F Statistic (df = 9; 1270)	4,052.536***	5,651.163***	5,730.115***	3,280.784***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.46: Amostra de opções com um preço superior a 0.5

	<i>Dependent variable:</i>			
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)	log(RMSRE)
	(1)	(2)	(3)	(4)
log(caminhos)	−0.605*** (0.007)	−0.716*** (0.007)	−0.653*** (0.007)	−0.544*** (0.005)
log(graú)	0.229*** (0.033)	0.031 (0.033)	0.153*** (0.030)	−0.022 (0.024)
antitética	−0.088*** (0.023)	−0.091*** (0.022)	−0.096*** (0.021)	−0.073*** (0.017)
sobol	−0.189*** (0.036)	−0.353*** (0.035)	−0.251*** (0.033)	−0.364*** (0.026)
svd	−0.295*** (0.023)	−0.207*** (0.022)	−0.263*** (0.021)	−0.117*** (0.017)
Owen scrambling	−0.231*** (0.036)	−0.261*** (0.035)	−0.230*** (0.033)	−0.069*** (0.026)
Faure-Tezuka scrambling	−0.191*** (0.036)	−0.258*** (0.035)	−0.227*** (0.033)	−0.280*** (0.026)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	−0.215*** (0.036)	−0.268*** (0.035)	−0.254*** (0.033)	−0.160*** (0.026)
ds	−0.025 (0.023)	−0.021 (0.022)	−0.018 (0.021)	−0.032* (0.017)
constante	2.671*** (0.083)	2.172*** (0.083)	2.033*** (0.077)	0.272*** (0.062)
Observações	1,280	1,280	1,280	1,280
R ²	0.859	0.896	0.893	0.901
R ² Ajustado	0.858	0.896	0.892	0.900
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.403	0.399	0.370	0.298
F Statistic (df = 9; 1270)	857.482***	1,220.491***	1,179.170***	1,282.719***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.47: Opções com até 20 dias para a maturidade

	<i>Dependent variable:</i>			
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)	log(RMSRE)
	(1)	(2)	(3)	(4)
log(caminhos)	−0.636*** (0.004)	−0.741*** (0.004)	−0.692*** (0.004)	−0.597*** (0.005)
log(grau)	0.145*** (0.018)	0.025 (0.019)	0.074*** (0.017)	0.040* (0.021)
antitética	−0.078*** (0.012)	−0.108*** (0.013)	−0.097*** (0.012)	−0.067*** (0.014)
sobol	0.077*** (0.020)	0.044** (0.021)	0.083*** (0.018)	−0.121*** (0.023)
svd	−0.133*** (0.012)	−0.124*** (0.013)	−0.132*** (0.012)	−0.121*** (0.014)
Owen scrambling	−0.356*** (0.020)	−0.287*** (0.021)	−0.333*** (0.018)	0.016 (0.023)
Faure-Tezuka scrambling	−0.325*** (0.020)	−0.312*** (0.021)	−0.335*** (0.018)	−0.163*** (0.023)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	−0.342*** (0.020)	−0.365*** (0.021)	−0.373*** (0.018)	0.019 (0.023)
ds	−0.002 (0.012)	−0.007 (0.013)	−0.007 (0.012)	−0.014 (0.014)
constante	3.481*** (0.046)	3.465*** (0.049)	3.235*** (0.043)	1.493*** (0.054)
Observações	1,280	1,280	1,280	1,280
R ²	0.955	0.963	0.966	0.932
R ² Ajustado	0.955	0.962	0.966	0.932
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.222	0.236	0.208	0.259
F Statistic (df = 9; 1270)	3,024.814***	3,627.769***	4,066.386***	1,935.747***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.48: Opções com 30, 40 e 60 dias para a maturidade

	<i>Dependent variable:</i>			
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)	log(RMSRE)
	(1)	(2)	(3)	(4)
log(caminhos)	−0.659*** (0.004)	−0.734*** (0.004)	−0.707*** (0.003)	−0.596*** (0.005)
log(graau)	0.198*** (0.019)	0.127*** (0.017)	0.158*** (0.016)	0.096*** (0.023)
antitética	−0.045*** (0.013)	−0.026** (0.012)	−0.035*** (0.011)	0.048*** (0.016)
sobol	0.127*** (0.021)	0.108*** (0.019)	0.166*** (0.017)	−0.449*** (0.025)
svd	−0.120*** (0.013)	−0.150*** (0.012)	−0.143*** (0.011)	−0.153*** (0.016)
Owen scrambling	−0.397*** (0.021)	−0.360*** (0.019)	−0.399*** (0.017)	−0.183*** (0.025)
Faure-Tezuka scrambling	−0.323*** (0.021)	−0.381*** (0.019)	−0.415*** (0.017)	−0.142*** (0.025)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	−0.282*** (0.021)	−0.189*** (0.019)	−0.254*** (0.017)	0.431*** (0.025)
ds	−0.025* (0.013)	−0.012 (0.012)	−0.015 (0.011)	−0.007 (0.016)
constante	4.068*** (0.048)	3.781*** (0.044)	3.711*** (0.041)	1.884*** (0.059)
Observações	1,280	1,280	1,280	1,280
R ²	0.955	0.969	0.971	0.923
R ² Ajustado	0.954	0.969	0.971	0.923
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.232	0.211	0.196	0.287
F Statistic (df = 9; 1270)	2,974.891***	4,419.159***	4,798.826***	1,692.778***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.49: Opções com 80, 90 e 120 dias para a maturidade

	<i>Dependent variable:</i>			
	log(MaxAE)	log(MAE)	log(RMSE)	log(RMSRE)
	(1)	(2)	(3)	(4)
log(caminhos)	−0.668*** (0.004)	−0.735*** (0.004)	−0.715*** (0.004)	−0.656*** (0.005)
log(grau)	0.215*** (0.017)	0.197*** (0.018)	0.202*** (0.017)	0.084*** (0.021)
antitética	−0.015 (0.011)	−0.012 (0.012)	−0.016 (0.011)	0.096*** (0.015)
sobol	0.145*** (0.018)	0.192*** (0.020)	0.205*** (0.018)	−0.191*** (0.023)
svd	−0.150*** (0.011)	−0.213*** (0.012)	−0.196*** (0.011)	−0.176*** (0.015)
Owen scrambling	−0.308*** (0.018)	−0.261*** (0.020)	−0.300*** (0.018)	−0.049** (0.023)
Faure-Tezuka scrambling	−0.383*** (0.018)	−0.421*** (0.020)	−0.427*** (0.018)	−0.201*** (0.023)
Owen e Faure-Tezuka scrambling	−0.174*** (0.018)	−0.129*** (0.020)	−0.188*** (0.018)	0.383*** (0.023)
ds	−0.010 (0.011)	0.008 (0.012)	0.003 (0.011)	0.021 (0.015)
constante	4.433*** (0.042)	4.103*** (0.046)	4.098*** (0.043)	2.376*** (0.054)
Observações	1,280	1,280	1,280	1,280
R ²	0.965	0.966	0.969	0.944
R ² Ajustado	0.965	0.966	0.969	0.943
Erro padrão resíduos (df = 1270)	0.204	0.223	0.205	0.261
F Statistic (df = 9; 1270)	3,929.713***	3,987.895***	4,458.343***	2,372.778***

Nota:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela 5.50: Opções com 180, 240 e 270 dias para a maturidade

6. Comentários Finais

Foi nosso propósito averiguar se a utilização de métodos de amostragem alternativos poderiam conduzir a melhores resultados na avaliação de opções Americanas. Quando falamos de melhores resultados referimo-nos a um menor erro de avaliação com o mesmo custo computacional ou, preferencialmente, com um custo computacional inferior.

Na primeira parte do nosso estudo, focamo-nos num ponto essencial para a avaliação de opções que é a geração de caminhos para o ativo subjacente.

As simulações realizadas com o modelo linear AR(1) permitiram-nos concluir acerca da superioridade dos métodos Quasi-Monte Carlo. Quando se analisa o desempenho de cada um dos métodos comparando o efeito da utilização de variáveis antitéticas, podemos concluir que, para a média houve uma clara melhoria quando se utiliza esta técnica, tendo-se obtido erros nulos na aproximação desta medida. Quando não são utilizadas variáveis antitéticas, e comparando os erros obtidos nas simulações com números pseudo-aleatórios e aqueles que se obtêm quando usamos as várias sequências de baixa discrepância incluídas neste trabalho, concluimos que as sequências de *Sobol* apresentam o melhor desempenho, mesmo para dimensões elevadas. Quando a dimensão aumenta, as sequências de *Halton* revelam-se pouco adequadas uma vez que, frequentemente produzem erros bastante superiores aos originados pelos números pseudo-aleatórios.

Quando analisamos a normalidade das distribuições marginais, verificamos que as sequências de *Sobol* e *Sobol Scrambling* reproduzem a normalidade dos *inputs*. Quando a amostragem recorre às sequências de Halton, para baixas dimensões a distribuição marginal aproxima-se da Normal. No entanto, quando a dimensão aumenta, as distribuições marginais afastam-se da normalidade.

Importa realçar que o ganho obtido em precisão usando os métodos Quasi-Monte Carlo é muito superior ao ganho obtido aumentando o número de caminhos no método Monte

Carlo (com PRN), refletindo a baixa discrepância destes conjuntos de números. Esta é uma importante característica destes números já que permitem aumentar a precisão com um menor custo computacional.

Com os modelos não lineares GARCH e NGARCH os métodos QMC também se revelaram úteis para a diminuição do erro obtido nas estimativas da média. Os resultados obtidos permitem reduzir o número de caminhos usados nas simulações e aumentar a precisão das estimativas.

Na segunda parte do nosso estudo avaliamos o reflexo sobre o preço de opções Americanas, produzido pela utilização dos métodos alternativos de simulação, assim como o uso de técnicas de redução da variância.

Aplicamos o método *Least Squares Monte Carlo* no cálculo do preço de diversas opções Americanas, começando com um caso mais simples com um número reduzido de opções para posteriormente estendermos a um conjunto alargado de opções.

Com base nos estudos realizados no capítulo 4 e na primeira parte do capítulo 5, elegemos as sequências de *Sobol* para um estudo mais aprofundado. Incluímos ainda diferentes tipos de *scrambling* e consideramos dois processos GARCH neste estudo. Incluímos também o método de redução da variância proposto por [Duan e Simonato \(1998\)](#) (DS) e *Singular Value Decomposition* (SVD). Procedemos à avaliação de um total de 250 880 opções combinando diversos métodos.

A análise dos resultados permite-nos concluir que a técnica de redução da variância proposta por [Duan e Simonato \(1998\)](#) não se mostrou útil na avaliação destas opções, para os processos considerados. Comparando os resultados para as várias maturidades, concluímos que as sequências de *Sobol* combinadas com SVD e variáveis antitéticas produzem os melhores resultados, principalmente quando se usa um reduzido número de caminhos na simulação.

Indo de encontro ao que é referido na literatura, o grau dos polinómios considerados na regressão *Least Squares Monte Carlo* não se mostrou relevante neste estudo, observando-se que, frequentemente, os polinómios de grau mais baixo produzem menores erros.

Nas opções com maturidades mais baixas, conjugando as sequências de *Sobol* com variáveis antitéticas e SVD obtém-se um decréscimo bastante rápido do erro com o aumento de caminhos.

No caso das opções com maturidade superior a 180 dias, o uso de variáveis antitéticas, por si só, não apresenta vantagens. A redução nos erros provocada pela substituição

dos PRN pelas sequências de *Sobol*, é mais expressiva para as maturidades mais elevadas. Para opções com maturidades mais alargadas, realça-se a importância de usar sequências randomizadas.

Neste trabalho foi também realizado um estudo pioneiro onde se estende a aplicação destas metodologias a distribuições diferentes da $\mathcal{N}(0, 1)$, concretamente trabalhamos com a distribuição Gaussiana Normal Inversa $\mathcal{NIG}(2, 0)$ e $\mathcal{NIG}(2, 0.2)$.

Algumas conclusões que podemos realçar são: usando a distribuição simétrica $\mathcal{NIG}(2, 0)$ para opções com maturidades baixas, aumentar o grau dos polinómios melhora os resultados, mas quando a maturidade aumenta os resultados pioram. No caso da $\mathcal{NIG}(2, 0.2)$ o aumento do grau dos polinómios faz aumentar os erros mas quando se utiliza SVD esse efeito desaparece. Outra conclusão que podemos adiantar é que com a distribuição assimétrica $\mathcal{NIG}(2, 0.2)$ os erros obtidos são menores do que com as outras distribuições.

No final de um trabalho desta natureza muitas direções de trabalho futuro ficam em aberto. A extensão natural será considerar modelos governados por outras inovações não gaussianas e comparar o desempenho com o observado com a distribuição Gaussiana Normal Inversa.

Os estudos que realizamos ocorreram no ambiente controlado das distribuições paramétricas. Seria interessante considerar uma abordagem não paramétrica, como *Filtered Historical Simulation* de [Barone-Adesi et al. \(2008\)](#) e averiguar o desempenho dos métodos Quasi-Monte Carlo neste contexto. São duas linhas de investigação deixadas para trabalho futuro.

Apêndice A. Anexos do Capítulo 4

A.1 Modelo AR(1)

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{A. 1})$$

onde $\epsilon_t = z_t \sigma_\epsilon$ com $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $|\alpha_1| < 1$.

Calculo de $E(x_{h+l}|x_h)$

Comecemos por calcular $x_{h+1}|x_h$

$$x_{h+1} = \alpha_0 + \alpha_1 x_h + \epsilon_{h+1}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} x_{h+2} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{h+1} + \epsilon_{h+2} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 (\alpha_0 + \alpha_1 x_h + \epsilon_{h+1}) + \epsilon_{h+2} \\ &= (1 + \alpha_1) \alpha_0 + \alpha_1^2 x_h + \alpha_1 \epsilon_{h+1} + \epsilon_{h+2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_{h+3} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{h+2} + \epsilon_{h+3} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 ((1 + \alpha_1) \alpha_0 + \alpha_1^2 x_h + \alpha_1 \epsilon_{h+1} + \epsilon_{h+2}) + \epsilon_{h+3} \\ &= (1 + \alpha_1 + \alpha_1^2) \alpha_0 + \alpha_1^3 x_h + \alpha_1^2 \epsilon_{h+1} + \alpha_1 \epsilon_{h+2} + \epsilon_{h+3} \end{aligned}$$

Continuando, obtemos

$$\begin{aligned} x_{h+l} &= (1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_1^{l-1}) \alpha_0 + \alpha_1^l x_h + \alpha_1^{l-1} \epsilon_{h+1} + \alpha_1^{l-2} \epsilon_{h+2} + \cdots + \epsilon_{h+l} \\ &= \frac{1 - \alpha_1^l}{1 - \alpha_1} \alpha_0 + \alpha_1^l x_h + \alpha_1^{l-1} \epsilon_{h+1} + \alpha_1^{l-2} \epsilon_{h+2} + \cdots + \epsilon_{h+l}. \end{aligned}$$

Assim,

$$E(x_{h+l}|x_h) = \frac{1 - \alpha_1^l}{1 - \alpha_1} \alpha_0 + \alpha_1^l x_h. \quad (\text{A. 2})$$

Se pretendermos escrever em função de x_0 , obtemos

$$E(x_l|x_0) = \frac{1 - \alpha_1^l}{1 - \alpha_1} \alpha_0 + \alpha_1^l x_0. \quad (\text{A. 3})$$

Calculo de $V(x_{h+l}|x_h)$

$$\begin{aligned} V(x_{h+l}|x_h) &= \alpha_1^{2l} \underbrace{V(x_h|x_h)}_0 + \alpha_1^{2(l-1)} \sigma_\epsilon^2 + \alpha_1^{2(l-2)} \sigma_\epsilon^2 + \cdots + \sigma_\epsilon^2 \\ &= \frac{1 - \alpha_1^{2l}}{1 - \alpha_1^2} \sigma_\epsilon^2. \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

A.2 Transformada Inversa de Probabilidade - PIT

O uso da transformada integral de probabilidade (PIT) para avaliar a correta especificação da distribuição condicional de um modelo, surgiu com o trabalho de Rosenblatt (1952).

Este método foi usado para avaliar distribuições preditivas de tipo contínuo por Rosenblatt (1952), Dawid (1984) e mais recentemente por Gneiting *et al.* (2007) e Gneiting e Raftery (2007).

O PIT tem uma distribuição uniforme quando a distribuição subjacente ao modelo é contínua. Este método baseia-se na relação entre a verdadeira densidade geradora do processo, $f_t(y_t|\Omega_{t-1})$, e a densidade preditiva, $p_t(y_t|\Omega_{t-1})$, sendo $\Omega_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-1}, \dots\}$. Esta relação é estabelecida através da transformada integral de probabilidade (PIT), definida por

$$\begin{aligned} z_t &= \int_{-\infty}^{y_t} p_t(u|\Omega_{t-1}) du \\ &= P_t(y_t|\Omega_{t-1}) \end{aligned}$$

onde P_t é a função de distribuição condicional de y_t .

Diebold *et al.* (1998) estabeleceram que se $p_t(y_t|\Omega_{t-1}) = f_t(y_t|\Omega_{t-1})$, isto é, se a densidade preditiva coincide com a verdadeira densidade, então $z_t \sim U(0, 1)$. Assim, se a distribuição preditiva estiver bem especificada, as séries de variáveis aleatórias $\{z_{j,t} = P_t(Y_{j,t}|\Omega_{t-1})\}$ são iid e uniformemente distribuídas em $(0, 1)$.

Para averiguar a uniformidade das séries dos PIT's, Diebold *et al.* (1998) sugerem uma abordagem gráfica baseada em histogramas e para averiguar se z é iid, sugerem a elaboração dos correlogramas de $(z - \bar{z})$, $(z - \bar{z})^2$, $(z - \bar{z})^3$ e $(z - \bar{z})^4$ ou os testes K-S ou Cramer-von Mises.

A.3 Tabelas do modelo AR

Modelo	L	10 rep				100 rep				1000 rep			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
-0.99	4096	-0.682642	0.678029	0.019521	-0.079670	-0.674444	0.674629	0.000862	0.001783	-0.674286	0.674656	-0.002775	-0.003094
	16384	-0.677608	0.671787	-0.000270	-0.017596	-0.675007	0.673987	0.001607	0.003883	-0.674518	0.674641	-0.000221	-0.000297
	65536	-0.675113	0.674335	-0.000431	-0.013001	-0.674573	0.674140	0.000859	0.001708	-0.674521	0.674481	0.000156	0.000507
-0.90	4096	-0.682068	0.682199	0.012891	-0.068402	-0.675338	0.675650	0.001917	-0.002123	-0.674476	0.674768	-0.002331	-0.003496
	16384	-0.677574	0.676034	0.000364	-0.013729	-0.675310	0.674749	0.002412	0.001160	-0.674642	0.674672	-0.000327	-0.000509
	65536	-0.676008	0.675641	0.001124	-0.005896	-0.674909	0.674561	0.001748	0.001365	-0.674633	0.674603	0.000179	0.000589
-0.50	4096	-0.670325	0.676968	0.007264	0.009704	-0.673203	0.674788	0.003984	-0.002152	-0.674327	0.673878	0.000553	0.001025
	16384	-0.674123	0.671309	0.007044	0.015362	-0.675269	0.673958	0.003554	-0.003886	-0.674396	0.674292	0.000240	0.000958
	65536	-0.674048	0.672943	0.000810	0.003851	-0.674768	0.674263	0.001780	-0.000013	-0.674603	0.674478	0.000057	0.000155
0.00	4096	-0.679220	0.668814	-0.005495	-0.013064	-0.672898	0.673609	0.004282	0.002493	-0.674440	0.673964	-0.000089	0.000894
	16384	-0.675612	0.671904	0.003025	0.007601	-0.674854	0.673607	0.003737	-0.004116	-0.674589	0.674302	0.000160	0.001076
	65536	-0.674476	0.672847	0.001055	-0.000683	-0.674634	0.673886	0.002048	0.000657	-0.674582	0.674510	0.000333	-0.000407
0.50	4096	-0.665251	0.672505	-0.007914	-0.016667	-0.673089	0.671897	0.005689	0.001106	-0.673953	0.674027	-0.000380	0.002280
	16384	-0.672495	0.674946	0.000452	-0.002611	-0.674706	0.673581	0.003184	-0.001845	-0.674339	0.674305	-0.000120	0.000838
	65536	-0.674163	0.673069	0.002639	-0.000635	-0.674704	0.673708	0.002641	0.000904	-0.674388	0.674350	0.000209	0.000345
0.90	4096	-0.669959	0.678388	-0.009930	-0.004039	-0.672159	0.673703	0.001404	0.000684	-0.674119	0.673985	0.001357	-0.000134
	16384	-0.675868	0.675595	-0.000154	-0.012588	-0.674217	0.674598	0.001314	0.000215	-0.674252	0.674550	-0.000252	-0.000187
	65536	-0.674918	0.674332	-0.000360	0.004161	-0.674388	0.674646	0.000326	0.001077	-0.674382	0.674510	-0.000013	0.000158
0.99	4096	-0.674046	0.675458	-0.008762	0.008179	-0.675932	0.674867	0.000049	-0.002577	-0.674103	0.674227	0.001605	-0.000734
	16384	-0.674000	0.674402	-0.003330	-0.014354	-0.674910	0.674690	0.000738	-0.001402	-0.674190	0.674638	-0.000047	-0.000653
	65536	-0.673799	0.674548	-0.003253	0.001137	-0.674648	0.674517	-0.000017	0.000800	-0.674386	0.674471	-0.000030	-0.000399

Tabela A. 1: Outros coeficientes PRN sem antitéticas, t=10 (10,100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	10 rep				100 rep				1000 rep			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
-0.99	4096	-0.668225	0.676726	-0.027666	0.022089	-0.674462	0.675006	0.003144	-0.004273	-0.674513	0.674578	-0.000813	-0.003287
	16384	-0.671243	0.673937	-0.004516	0.007479	-0.674210	0.674605	0.000537	-0.004524	-0.674424	0.674470	-0.000287	-0.001376
-0.90	65536	-0.673729	0.675467	0.002013	-0.000584	-0.674372	0.674799	0.000146	-0.002037	-0.674511	0.674508	-0.000005	-0.000498
	4096	-0.679798	0.674138	0.008131	-0.028860	-0.673932	0.674040	0.006133	-0.000856	-0.674560	0.674353	0.000604	-0.004698
-0.90	16384	-0.677523	0.676086	0.007367	-0.006050	-0.673892	0.674197	0.000986	0.003150	-0.674596	0.674862	-0.000391	-0.001768
	65536	-0.674856	0.675235	0.004686	-0.009379	-0.674263	0.674204	-0.000168	-0.000524	-0.674393	0.674497	-0.000578	-0.000261
-0.50	4096	-0.677611	0.678282	0.000375	0.008765	-0.676767	0.677279	-0.003803	-0.006255	-0.674385	0.674588	-0.000973	-0.004622
	16384	-0.676514	0.673012	0.004072	-0.007725	-0.674725	0.674014	0.002242	0.001581	-0.674572	0.674378	0.000800	-0.001881
-0.50	65536	-0.674795	0.673969	0.003859	-0.007713	-0.674361	0.674167	0.001252	0.000696	-0.674440	0.674411	-0.000075	0.000347
	4096	-0.67867	0.675269	-0.004098	0.008359	-0.677129	0.675770	0.000187	-0.010113	-0.674308	0.674866	-0.002223	-0.002940
0.00	16384	-0.674934	0.671626	0.002475	0.000064	-0.674794	0.674477	0.001753	0.002004	-0.674632	0.674622	0.000245	-0.002081
	65536	-0.675208	0.672913	0.003789	0.002584	-0.674420	0.674628	0.001749	-0.001087	-0.674470	0.674521	0.000119	-0.000129
0.50	4096	-0.678337	0.674340	-0.005988	0.017323	-0.677587	0.674580	-0.001044	-0.014124	-0.674656	0.674214	-0.002656	-0.002539
	16384	-0.671547	0.673156	-0.009817	0.023439	-0.674405	0.674330	-0.002567	-0.000821	-0.674476	0.674582	-0.000558	-0.001357
0.50	65536	-0.674509	0.673491	-0.001572	0.009855	-0.674979	0.674083	0.000474	-0.000243	-0.674594	0.674562	0.000023	-0.000991
	4096	-0.673103	0.677295	0.010444	-0.028607	-0.674719	0.673595	-0.000544	-0.000000	-0.674475	0.674260	-0.000294	-0.001884
0.90	16384	-0.672952	0.675517	-0.007285	-0.012041	-0.674499	0.674470	-0.004474	0.001177	-0.674364	0.674387	-0.000749	-0.000426
	65536	-0.673716	0.674336	-0.005915	-0.004261	-0.674651	0.674579	-0.001237	0.000854	-0.674210	0.674374	-0.000361	0.001397
0.99	4096	-0.674427	0.676554	-0.008407	0.001051	-0.675951	0.675614	0.002623	-0.009698	-0.675069	0.674525	0.001078	-0.002751
	16384	-0.673822	0.673047	-0.000901	-0.010122	-0.674922	0.674962	0.001677	-0.001759	-0.674599	0.674631	0.000670	0.000159
0.99	65536	-0.673529	0.674174	-0.002309	0.000492	-0.674545	0.674737	-0.000472	-0.001340	-0.674539	0.674591	-0.000202	0.000229

Tabela A. 2: Outros coeficientes PRN sem anti-técnicas, t=130 (10,100 e 1000 réplicas)

Modelo	10 rep				100 rep				1000 rep				
	L	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
-0.99	4096	-0.675473	0.675412	-0.017473	-0.001890	-0.675461	0.675055	-0.002947	-0.007535	-0.673700	0.673486	0.000292	-0.000486
	16384	-0.677209	0.675344	0.002101	0.001691	-0.674578	0.674543	-0.000945	-0.000949	-0.674380	0.674227	-0.000266	0.001013
	65536	-0.675912	0.676112	0.001782	-0.008010	-0.675124	0.674667	0.000858	-0.003221	-0.674572	0.674415	0.000364	0.000429
-0.90	4096	-0.680171	0.677640	0.003195	-0.008219	-0.676687	0.675888	-0.001746	-0.014821	-0.674665	0.674139	-0.000326	-0.001566
	16384	-0.674789	0.669669	0.008868	0.015900	-0.675068	0.674071	0.000092	-0.003371	-0.674634	0.674529	-0.000068	-0.000452
	65536	-0.675830	0.672535	0.003463	-0.002986	-0.674480	0.674316	0.001441	-0.001015	-0.674499	0.674474	0.000733	-0.000008
-0.50	4096	-0.679079	0.682013	-0.006763	-0.036929	-0.674641	0.675171	-0.001923	-0.003119	-0.673988	0.674085	-0.001024	0.001662
	16384	-0.675583	0.677446	0.007401	-0.019356	-0.675071	0.674374	0.001061	-0.006350	-0.674603	0.674405	-0.000700	-0.000378
	65536	-0.675504	0.677797	-0.002285	-0.015748	-0.674837	0.675167	-0.000344	-0.005295	-0.674596	0.674560	-0.000216	-0.000853
0.00	4096	-0.674914	0.679684	-0.017802	-0.049195	-0.671869	0.674355	-0.000988	0.001080	-0.673682	0.674089	-0.000468	-0.001420
	16384	-0.674670	0.677074	-0.002423	-0.013829	-0.673758	0.675092	-0.000201	-0.001022	-0.674508	0.674550	-0.000543	-0.000932
	65536	-0.674453	0.675483	0.000636	-0.006184	-0.674605	0.674678	0.000281	-0.002336	-0.674472	0.674510	-0.000084	0.000367
0.50	4096	-0.675188	0.673529	-0.018248	-0.034168	-0.674128	0.672511	-0.000697	0.006355	-0.673921	0.673792	-0.000609	-0.001735
	16384	-0.674917	0.676913	-0.014369	-0.000700	-0.674920	0.674263	-0.000608	0.000762	-0.674279	0.674444	0.000084	-0.000334
	65536	-0.674163	0.674680	-0.000881	0.000227	-0.674800	0.674305	0.000233	0.000323	-0.674414	0.674334	0.000547	0.000897
0.90	4096	-0.669801	0.672792	-0.027444	0.026715	-0.672062	0.672207	0.000560	0.008245	-0.673989	0.673479	-0.000303	-0.000767
	16384	-0.672911	0.675627	-0.010291	0.013496	-0.674431	0.674257	0.001759	0.000346	-0.674112	0.673911	-0.000171	0.000527
	65536	-0.675152	0.675851	0.000247	0.004218	-0.674682	0.674486	0.001110	0.001062	-0.674385	0.674293	-0.000023	0.000933
0.99	4096	-0.668543	0.671192	-0.002122	0.028168	-0.670192	0.673038	-0.000687	0.007995	-0.674163	0.674230	0.000740	-0.003775
	16384	-0.671565	0.673447	-0.008950	-0.004813	-0.673475	0.674783	-0.001894	-0.002097	-0.674598	0.674368	-0.000077	-0.001237
	65536	-0.674738	0.674457	0.004465	-0.007776	-0.674656	0.674425	0.001012	0.000130	-0.674648	0.674516	-0.000088	-0.000392

Tabela A. 3: Outros coeficientes PRN sem antitéticas, t=270 (10,100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	10 rep				100 rep				1000 rep			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
-0.99	4096	-0.682567	0.682567	0.000000	-0.075868	-0.674944	0.674944	0.000000	0.004535	-0.674436	0.674436	0.000000	-0.006509
	16384	-0.674950	0.674950	0.000000	-0.050580	-0.674479	0.674479	0.000000	0.001550	-0.674462	0.674462	0.000000	-0.001476
	65536	-0.674297	0.674297	0.000000	-0.012531	-0.674187	0.674187	0.000000	0.005233	-0.674559	0.674559	0.000000	0.000232
-0.90	4096	-0.681339	0.681339	0.000000	-0.063955	-0.676346	0.676346	0.000000	-0.001431	-0.675165	0.675165	0.000000	-0.007764
	16384	-0.679581	0.679581	0.000000	-0.040671	-0.675083	0.675083	0.000000	-0.002036	-0.674714	0.674714	0.000000	-0.001785
	65536	-0.675621	0.675621	0.000000	-0.005357	-0.674988	0.674988	0.000000	0.005505	-0.674745	0.674745	0.000000	0.000228
-0.50	4096	-0.671989	0.671989	0.000000	0.036966	-0.672973	0.672973	0.000000	0.001031	-0.674373	0.674373	0.000000	-0.003453
	16384	-0.673313	0.673313	0.000000	0.008915	-0.674258	0.674258	0.000000	-0.005675	-0.674274	0.674274	0.000000	0.000829
	65536	-0.672961	0.672961	0.000000	0.019027	-0.674439	0.674439	0.000000	0.001586	-0.674412	0.674412	0.000000	0.000920
0.00	4096	-0.673336	0.673336	0.000000	-0.003146	-0.674773	0.674773	0.000000	-0.001937	-0.674830	0.674830	0.000000	-0.006763
	16384	-0.673584	0.673584	0.000000	-0.007077	-0.674459	0.674459	0.000000	-0.008701	-0.674364	0.674364	0.000000	0.001951
	65536	-0.673452	0.673452	0.000000	0.009803	-0.674324	0.674324	0.000000	0.000088	-0.674584	0.674584	0.000000	0.000278
0.50	4096	-0.666778	0.666778	-0.000000	-0.022128	-0.673303	0.673303	-0.000000	-0.001699	-0.674529	0.674529	-0.000000	-0.003215
	16384	-0.673161	0.673161	-0.000000	-0.012181	-0.673661	0.673661	-0.000000	-0.005589	-0.674299	0.674299	-0.000000	0.000797
	65536	-0.674566	0.674566	-0.000000	-0.009192	-0.674332	0.674332	-0.000000	0.000266	-0.674350	0.674350	-0.000000	0.000505
0.90	4096	-0.677089	0.677089	0.000000	-0.008743	-0.672935	0.672935	0.000000	0.001193	-0.673926	0.673926	0.000000	0.002428
	16384	-0.676586	0.676586	0.000000	-0.013396	-0.674015	0.674015	0.000000	0.000419	-0.674350	0.674350	0.000000	-0.001254
	65536	-0.674532	0.674532	0.000000	-0.010197	-0.674685	0.674685	0.000000	-0.002439	-0.674467	0.674467	0.000000	0.000021
0.99	4096	-0.676728	0.676728	-0.000000	-0.011970	-0.674779	0.674779	-0.000000	-0.005434	-0.673737	0.673737	-0.000000	0.000163
	16384	-0.676461	0.676461	-0.000000	-0.015509	-0.675209	0.675209	-0.000000	-0.002598	-0.674244	0.674244	-0.000000	-0.000967
	65536	-0.674582	0.674582	-0.000000	-0.012621	-0.674998	0.674998	-0.000000	-0.004113	-0.674485	0.674485	-0.000000	-0.000523

Tabela A. 4: Outros coeficientes PRN com antitéticas, t=10 (10,100 e 1000 réplicas)

Modelo	10 rep				100 rep				1000 rep			
	L	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria
-0.99	4096	-0.670684	0.670684	0.000000	0.008851	-0.674341	0.674341	0.000000	0.002351	-0.674948	0.674948	0.000000
	16384	-0.670955	0.670955	0.000000	0.028844	-0.674752	0.674752	0.000000	-0.006719	-0.674509	0.674509	0.000000
	65536	-0.673931	0.673931	0.000000	-0.001784	-0.674550	0.674550	0.000000	-0.001442	-0.674407	0.674407	0.000000
-0.90	4096	-0.676379	0.676379	0.000000	-0.046761	-0.673743	0.673743	0.000000	0.003519	-0.674391	0.674391	0.000000
	16384	-0.678617	0.678617	0.000000	-0.016226	-0.674300	0.674300	0.000000	0.002069	-0.674785	0.674785	0.000000
	65536	-0.674950	0.674950	0.000000	-0.005979	-0.673793	0.673793	0.000000	0.003079	-0.674544	0.674544	0.000000
-0.50	4096	-0.681693	0.681693	0.000000	-0.020319	-0.680832	0.680832	0.000000	-0.017683	-0.675253	0.675253	0.000000
	16384	-0.676243	0.676243	0.000000	-0.008129	-0.675779	0.675779	0.000000	-0.002230	-0.674637	0.674637	0.000000
	65536	-0.674078	0.674078	0.000000	-0.000924	-0.674041	0.674041	0.000000	0.001858	-0.674482	0.674482	0.000000
0.00	4096	-0.679507	0.679507	0.000000	0.024745	-0.678824	0.678824	0.000000	-0.009610	-0.675271	0.675271	0.000000
	16384	-0.671613	0.671613	0.000000	0.026887	-0.674517	0.674517	0.000000	0.001479	-0.674415	0.674415	0.000000
	65536	-0.673447	0.673447	0.000000	0.009500	-0.674839	0.674839	0.000000	-0.000433	-0.674605	0.674605	0.000000
0.50	4096	-0.678023	0.678023	-0.000000	0.013943	-0.677253	0.677253	-0.000000	-0.011399	-0.674295	0.674295	-0.000000
	16384	-0.675118	0.675118	-0.000000	0.045588	-0.675460	0.675460	-0.000000	-0.000235	-0.674760	0.674760	-0.000000
	65536	-0.672685	0.672685	-0.000000	0.020790	-0.674630	0.674630	-0.000000	-0.001043	-0.674540	0.674540	-0.000000
0.90	4096	-0.669948	0.669948	-0.000000	-0.031560	-0.673492	0.673492	0.000000	-0.005309	-0.674259	0.674259	0.000000
	16384	-0.673533	0.673533	-0.000000	-0.021330	-0.674359	0.674359	-0.000000	0.001164	-0.674312	0.674312	-0.000000
	65536	-0.673168	0.673168	-0.000000	-0.009386	-0.674642	0.674642	-0.000000	-0.000660	-0.674308	0.674308	-0.000000
0.99	4096	-0.676772	0.676772	0.000000	0.012106	-0.676460	0.676460	0.000000	-0.012188	-0.674810	0.674810	0.000000
	16384	-0.674782	0.674782	0.000000	-0.000519	-0.675437	0.675437	0.000000	-0.002196	-0.674797	0.674797	0.000000
	65536	-0.673616	0.673616	0.000000	-0.008239	-0.674630	0.674630	0.000000	-0.003001	-0.674453	0.674453	0.000000

Tabela A. 5: Outros coeficientes PRN com antitéticas, t=130 (10,100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	10 rep				100 rep				1000 rep			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
-0.99	4096	-0.675840	0.675840	0.000000	0.013007	-0.676499	0.676499	0.000000	-0.020923	-0.673377	0.673377	0.000000	-0.002243
	16384	-0.676424	0.676424	0.000000	0.005259	-0.674530	0.674530	0.000000	-0.003005	-0.674216	0.674216	0.000000	0.000401
	65536	-0.676436	0.676436	0.000000	-0.007945	-0.674558	0.674558	0.000000	-0.000200	-0.674386	0.674386	0.000000	0.001281
-0.90	4096	-0.678684	0.678684	-0.000000	-0.043503	-0.676459	0.676459	-0.000000	-0.025936	-0.674427	0.674427	-0.000000	-0.004080
	16384	-0.675822	0.675822	-0.000000	-0.000410	-0.675523	0.675523	-0.000000	-0.006006	-0.674739	0.674739	-0.000000	-0.001288
	65536	-0.672940	0.672940	-0.000000	0.007187	-0.674457	0.674457	-0.000000	-0.000942	-0.674596	0.674596	-0.000000	-0.000379
-0.50	4096	-0.681344	0.681344	0.000000	-0.043399	-0.676119	0.676119	0.000000	-0.013419	-0.674114	0.674114	0.000000	0.000961
	16384	-0.677574	0.677574	0.000000	-0.024792	-0.675330	0.675330	0.000000	-0.005587	-0.674268	0.674268	0.000000	0.000105
	65536	-0.677186	0.677186	0.000000	-0.021756	-0.675350	0.675350	0.000000	-0.007929	-0.674515	0.674515	0.000000	-0.000013
0.00	4096	-0.673012	0.673012	0.000000	-0.042303	-0.673859	0.673859	0.000000	0.001019	-0.673403	0.673403	0.000000	0.000278
	16384	-0.676274	0.676274	0.000000	-0.016494	-0.674982	0.674982	0.000000	-0.002506	-0.674332	0.674332	0.000000	-0.001739
	65536	-0.675998	0.675998	0.000000	-0.015558	-0.674432	0.674432	0.000000	-0.002575	-0.674497	0.674497	0.000000	0.000611
0.50	4096	-0.674534	0.674534	-0.000000	-0.032256	-0.672414	0.672414	0.000000	0.014390	-0.673186	0.673186	-0.000000	0.001073
	16384	-0.675679	0.675679	-0.000000	-0.001554	-0.674979	0.674979	-0.000000	0.000953	-0.674434	0.674434	-0.000000	-0.001732
	65536	-0.674397	0.674397	-0.000000	-0.006060	-0.674346	0.674346	-0.000000	0.000736	-0.674421	0.674421	-0.000000	0.000889
0.90	4096	-0.673088	0.673088	0.000000	0.019080	-0.672881	0.672881	0.000000	0.007240	-0.674061	0.674061	0.000000	-0.001950
	16384	-0.672686	0.672686	-0.000000	0.015859	-0.673997	0.673997	-0.000000	0.002776	-0.673971	0.673971	-0.000000	-0.000447
	65536	-0.675626	0.675626	-0.000000	0.005079	-0.674878	0.674878	-0.000000	0.000229	-0.674285	0.674285	-0.000000	0.001025
0.99	4096	-0.672488	0.672488	-0.000000	0.007353	-0.673403	0.673403	-0.000000	-0.007617	-0.674479	0.674479	-0.000000	-0.005725
	16384	-0.671447	0.671447	-0.000000	0.016933	-0.673320	0.673320	-0.000000	0.009139	-0.674397	0.674397	-0.000000	-0.000285
	65536	-0.673077	0.673077	-0.000000	0.001422	-0.674081	0.674081	-0.000000	0.001012	-0.674578	0.674578	-0.000000	-0.000431

Tabela A. 6: Outros coeficientes PRN com antitéticas, t=270 (10,100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	$t = 10$					$t = 130$					$t = 270$				
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose			
-0.99	4096	-0.665098	0.681114	0.001245	-0.033736	-0.673091	0.662206	0.154835	0.261609	-0.626266	0.587417	0.370870	0.251389			
	16384	-0.667549	0.679729	-0.003833	-0.021507	-0.636794	0.657033	-0.061929	0.111725	-0.654271	0.636573	0.101187	0.302884			
	65536	-0.674049	0.677503	-0.001095	-0.004263	-0.668657	0.682659	0.011027	-0.020528	-0.629420	0.640728	-0.021942	0.328682			
-0.90	4096	-0.663269	0.675912	0.017729	-0.016352	-0.703369	0.445048	1.132790	1.503423	-0.525439	0.317681	1.959695	7.904455			
	16384	-0.669513	0.682641	0.001901	-0.013869	-0.655832	0.641954	0.271322	-0.045667	-0.649718	0.410809	1.100045	1.603549			
	65536	-0.675859	0.678540	0.000217	-0.003920	-0.683134	0.678245	0.061452	-0.184176	-0.725488	0.649935	0.197874	-0.375420			
-0.50	4096	-0.660721	0.668682	-0.004730	0.008663	-0.574429	0.447743	1.184136	5.176694	-0.636823	0.613708	0.819235	4.178999			
	16384	-0.676123	0.671216	-0.003830	-0.000130	-0.575458	0.315239	1.116640	1.968389	-0.588858	0.498640	1.071181	3.994918			
	65536	-0.676636	0.675165	-0.002931	-0.004460	-0.774405	0.834070	0.266490	-0.559276	-0.611445	0.401755	0.886230	1.251629			
0.00	4096	-0.672022	0.676733	-0.047241	-0.013565	-0.662438	0.662888	-0.022376	0.261012	-0.681260	0.685861	0.108791	0.042774			
	16384	-0.672961	0.676070	-0.021603	-0.018604	-0.671237	0.676487	-0.061319	0.122761	-0.672518	0.675793	-0.005179	0.110110			
	65536	-0.674162	0.674829	-0.007056	-0.003603	-0.669506	0.675107	-0.052885	0.061438	-0.670264	0.672878	-0.039820	0.098791			
0.50	4096	-0.672974	0.681438	-0.060411	-0.065704	-0.692841	0.789778	-0.330018	-0.363875	-0.696918	0.715881	0.031079	-0.427254			
	16384	-0.672427	0.676584	-0.023889	-0.031541	-0.642860	0.730306	-0.539804	0.131900	-0.699333	0.758592	-0.200744	-0.444210			
	65536	-0.672969	0.674950	-0.006186	-0.007601	-0.637157	0.685122	-0.301472	0.346708	-0.640133	0.723950	-0.410437	-0.011582			
0.90	4096	-0.675390	0.718445	-0.031482	-0.176308	-0.492515	0.605085	-1.123610	2.744619	-0.709678	0.839927	-0.240916	-0.509650			
	16384	-0.679967	0.680984	-0.010179	-0.119838	-0.430537	0.552946	-1.584902	9.386413	-0.587903	0.673974	-0.711989	1.117940			
	65536	-0.676640	0.674592	-0.002994	-0.039272	-0.577669	0.632967	-0.802101	5.518046	-0.484560	0.583553	-0.939267	4.825229			
0.99	4096	-0.687598	0.707626	-0.020336	-0.235406	-0.1117292	0.409221	-5.061011	37.001392	-0.327300	0.611417	-2.489472	9.140251			
	16384	-0.677811	0.675170	-0.005187	-0.131058	-0.323476	0.447693	-7.194532	96.597611	-0.177403	0.417479	-4.895367	39.719276			
	65536	-0.676653	0.673644	-0.001749	-0.049067	-0.544062	0.582721	-3.818599	66.474802	-0.325206	0.435539	-7.269119	109.409771			

Tabela A. 7: Outros coeficientes Halton

Modelo	L	$t = 10$				$t = 130$				$t = 270$			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
-0.99	4096	-0.661754	0.661754	-0.000000	-0.065964	-0.680696	0.680696	-0.000000	-0.058666	-0.609335	0.609335	-0.000000	0.489500
	16384	-0.671528	0.671528	0.000000	-0.075378	-0.658210	0.658210	0.000000	0.149925	-0.638969	0.638969	-0.000000	0.028990
	65536	-0.673625	0.673625	0.000000	-0.010467	-0.660645	0.660645	0.000000	0.218980	-0.632280	0.632280	0.000000	0.448538
-0.90	4096	-0.676810	0.676810	0.000000	-0.104500	-0.491783	0.491783	0.000000	4.372316	-0.514475	0.514475	0.000000	7.305445
	16384	-0.680124	0.680124	0.000000	-0.095630	-0.676659	0.676659	-0.000000	0.144941	-0.433151	0.433151	-0.000000	4.858839
	65536	-0.676099	0.676099	0.000000	-0.018531	-0.631423	0.631423	0.000000	-0.071233	-0.644861	0.644861	-0.000000	0.170781
-0.50	4096	-0.713114	0.713114	0.000000	-0.113508	-0.571281	0.571281	0.000000	5.349370	-0.704886	0.704886	0.000000	2.369674
	16384	-0.682880	0.682880	0.000000	-0.052234	-0.462613	0.462613	0.000000	3.470220	-0.569415	0.569415	0.000000	4.563711
	65536	-0.677061	0.677061	0.000000	-0.014849	-0.610679	0.610679	0.000000	0.265151	-0.486950	0.486950	0.000000	2.806731
0.00	4096	-0.673415	0.673415	0.000000	0.036427	-0.646490	0.646490	0.000000	0.439830	-0.751405	0.751405	0.000000	-0.294966
	16384	-0.674955	0.674955	0.000000	-0.010391	-0.678725	0.678725	0.000000	0.135992	-0.648187	0.648187	0.000000	0.258873
	65536	-0.674689	0.674689	0.000000	-0.000235	-0.671054	0.671054	0.000000	0.118294	-0.674006	0.674006	0.000000	0.122207
0.50	4096	-0.663575	0.663575	-0.000000	0.018348	-0.705639	0.705639	-0.000000	-0.187358	-0.771692	0.771692	0.000000	-0.579769
	16384	-0.673404	0.673404	-0.000000	-0.033337	-0.730949	0.730949	-0.000000	-0.135801	-0.684558	0.684558	0.000000	-0.270542
	65536	-0.673944	0.673944	-0.000000	-0.011796	-0.660606	0.660606	0.000000	0.433690	-0.733445	0.733445	-0.000000	-0.297040
0.90	4096	-0.692318	0.692318	0.000000	-0.127309	-0.658154	0.658154	-0.000000	1.086244	-0.815661	0.815661	-0.000000	-0.595712
	16384	-0.679880	0.679880	0.000000	-0.110766	-0.470328	0.470328	-0.000000	6.434348	-0.708018	0.708018	-0.000000	0.181124
	65536	-0.677273	0.677273	0.000000	-0.069556	-0.553037	0.553037	0.000000	9.491796	-0.575222	0.575222	-0.000000	2.870223
0.99	4096	-0.691662	0.691662	-0.000000	-0.247687	-0.329981	0.329981	0.000000	18.911936	-0.524535	0.524535	0.000000	4.591682
	16384	-0.683192	0.683192	-0.000000	-0.167702	-0.295907	0.295907	0.000000	67.783350	-0.336675	0.336675	0.000000	20.942491
	65536	-0.675118	0.675118	-0.000000	-0.081793	-0.483838	0.483838	0.000000	100.224905	-0.314279	0.314279	0.000000	72.534466

Tabela A. 8: Outros coeficientes Halton com antitéticas

Modelo	L	$t = 10$					$t = 130$					$t = 270$				
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose			
-0.99	4096	-0.677009	0.671051	-0.000577	-0.063496	-0.672219	0.680635	-0.019332	-0.070442	-0.683520	0.660104	0.010643	0.017866			
	16384	-0.676555	0.678362	0.001579	-0.019681	-0.674456	0.674989	-0.015882	0.008851	-0.688160	0.681494	0.016413	-0.059551			
	65536	-0.670618	0.670855	0.000204	0.005655	-0.675643	0.673031	0.007405	0.005633	-0.682776	0.680776	0.006850	-0.041639			
-0.90	4096	-0.687046	0.653196	-0.004116	-0.107359	-0.692346	0.674021	0.007877	-0.087349	-0.675544	0.698307	-0.022888	0.054806			
	16384	-0.683724	0.671321	0.000435	-0.024721	-0.677912	0.665666	0.002028	0.040572	-0.670337	0.681729	0.007981	-0.001945			
	65536	-0.672023	0.672041	-0.000147	0.007653	-0.676687	0.674647	0.003390	0.013368	-0.677848	0.681245	0.006317	-0.013326			
-0.50	4096	-0.698201	0.694489	0.004541	-0.283650	-0.684103	0.671328	0.006829	-0.020802	-0.677611	0.672743	-0.003504	-0.019323			
	16384	-0.676366	0.669450	-0.001108	-0.008626	-0.682192	0.671989	0.000609	-0.014506	-0.677715	0.671246	-0.000717	-0.009848			
	65536	-0.675422	0.675485	-0.000429	0.000213	-0.675710	0.675951	-0.000322	-0.011145	-0.674591	0.672662	0.001181	-0.010778			
0.00	4096	-0.675254	0.674932	0.001087	-0.040134	-0.675142	0.675096	-0.000070	-0.039015	-0.675061	0.675170	0.000160	-0.039072			
	16384	-0.674744	0.674712	0.000041	-0.014716	-0.674816	0.674740	0.000122	-0.014463	-0.674760	0.674746	0.000077	-0.014681			
	65536	-0.674551	0.674560	0.000012	-0.004887	-0.674567	0.674577	-0.000027	-0.004986	-0.674589	0.674565	0.000028	-0.004929			
0.50	4096	-0.661282	0.647231	0.012914	0.179026	-0.677277	0.674510	0.004911	-0.067585	-0.678459	0.671530	0.009419	-0.070555			
	16384	-0.680097	0.674585	0.006043	-0.019271	-0.672129	0.675090	0.005530	-0.002114	-0.679257	0.676926	0.003507	-0.020148			
	65536	-0.674097	0.674510	0.001930	-0.008067	-0.675095	0.674342	0.001819	0.002557	-0.675068	0.675913	0.000710	-0.001621			
0.90	4096	-0.691389	0.684147	0.059632	-0.076627	-0.673548	0.664888	0.019257	0.011281	-0.666401	0.682132	0.008055	-0.140274			
	16384	-0.673275	0.675079	0.020997	-0.050338	-0.677016	0.667817	0.020524	0.014821	-0.672025	0.678961	0.006809	-0.010634			
	65536	-0.673697	0.675676	0.009577	-0.030454	-0.676198	0.668074	0.003935	-0.014179	-0.670641	0.673499	-0.000763	0.008503			
0.99	4096	-0.707465	0.675556	0.075888	-0.132551	-0.667463	0.666587	-0.040232	-0.003323	-0.703934	0.686912	-0.021553	-0.114425			
	16384	-0.680006	0.680653	0.025855	-0.076550	-0.681771	0.670051	0.013212	-0.017168	-0.683221	0.670505	-0.002309	0.011533			
	65536	-0.675919	0.672820	0.011202	-0.041198	-0.676781	0.674432	-0.008105	-0.025590	-0.677459	0.671898	0.013619	0.009592			

Tabela A. 9: Outros coeficientes Sobol

Modelo	L	$t = 10$						$t = 130$						$t = 270$					
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3
-0.99	4096	-0.656518	0.656518	0.000000	-0.017772	-0.669110	0.669110	-0.000000	-0.051756	-0.641924	0.641924	0.000000	0.121863	-0.674845	0.674845	0.000000	-0.030787	-0.671389	0.671389
	16384	-0.674845	0.674845	0.000000	-0.081802	-0.672443	0.672443	0.000000	-0.031103	-0.674485	0.674485	0.000000	-0.045232	-0.677777	0.677777	0.000000	-0.013320	-0.674845	0.674845
	65536	-0.671389	0.671389	0.000000	0.001485	-0.676533	0.676533	0.000000	0.015341	-0.677777	0.677777	0.000000	-0.088256	-0.677777	0.677777	0.000000	-0.011761	-0.670208	0.670208
-0.90	4096	-0.668216	0.668216	0.000000	-0.049507	-0.665591	0.665591	0.000000	-0.004408	-0.688781	0.688781	-0.000000	0.005793	-0.668216	0.668216	-0.000000	-0.007488	-0.676927	0.676927
	16384	-0.676927	0.676927	0.000000	-0.119293	-0.671410	0.671410	0.000000	-0.001444	-0.683696	0.683696	-0.000000	-0.088256	-0.676927	0.676927	-0.000000	-0.010837	-0.670208	0.670208
	65536	-0.670208	0.670208	0.000000	0.002868	-0.676689	0.676689	0.000000	0.001915	-0.679953	0.679953	-0.000000	-0.088256	-0.676689	0.676689	-0.000000	-0.010837	-0.670208	0.670208
-0.50	4096	-0.697765	0.697765	0.000000	-0.285400	-0.685467	0.685467	0.000000	-0.025464	-0.683476	0.683476	0.000000	-0.062067	-0.697765	0.697765	0.000000	-0.062067	-0.697765	0.697765
	16384	-0.695633	0.695633	0.000000	-0.273919	-0.678263	0.678263	0.000000	-0.012469	-0.673456	0.673456	0.000000	-0.024035	-0.695633	0.695633	0.000000	-0.024035	-0.695633	0.695633
	65536	-0.675646	0.675646	0.000000	-0.004148	-0.676296	0.676296	0.000000	-0.019434	-0.674277	0.674277	0.000000	-0.010837	-0.675646	0.675646	0.000000	-0.010837	-0.675646	0.675646
0.00	4096	-0.675579	0.675579	0.000000	-0.062276	-0.676085	0.676085	0.000000	-0.065051	-0.675592	0.675592	0.000000	-0.062067	-0.675579	0.675579	0.000000	-0.062067	-0.675579	0.675579
	16384	-0.675121	0.675121	0.000000	-0.023999	-0.674864	0.674864	0.000000	-0.023579	-0.675118	0.675118	0.000000	-0.024035	-0.675121	0.675121	0.000000	-0.024035	-0.675121	0.675121
	65536	-0.674614	0.674614	0.000000	-0.008278	-0.674613	0.674613	0.000000	-0.008304	-0.674658	0.674658	0.000000	-0.008549	-0.674614	0.674614	0.000000	-0.008549	-0.674614	0.674614
0.50	4096	-0.656364	0.656364	-0.000000	0.112816	-0.666097	0.666097	0.000000	-0.033110	-0.687731	0.687731	0.000000	-0.082134	-0.656364	0.656364	-0.000000	-0.082134	-0.656364	0.656364
	16384	-0.652754	0.652754	-0.000000	0.224704	-0.676812	0.676812	0.000000	-0.023500	-0.677688	0.677688	0.000000	-0.031114	-0.652754	0.652754	-0.000000	-0.031114	-0.652754	0.652754
	65536	-0.675539	0.675539	-0.000000	-0.015404	-0.672687	0.672687	0.000000	0.002510	-0.676798	0.676798	0.000000	-0.007743	-0.675539	0.675539	-0.000000	-0.007743	-0.675539	0.675539
0.90	4096	-0.703246	0.703246	0.000000	-0.179437	-0.665795	0.665795	0.000000	0.017890	-0.681432	0.681432	-0.000000	-0.106045	-0.703246	0.703246	0.000000	-0.106045	-0.703246	0.703246
	16384	-0.674496	0.674496	0.000000	0.000288	-0.665344	0.665344	0.000000	0.027099	-0.677644	0.677644	-0.000000	-0.035599	-0.674496	0.674496	-0.000000	-0.035599	-0.674496	0.674496
	65536	-0.672102	0.672102	0.000000	-0.041186	-0.670490	0.670490	-0.000000	0.005490	-0.671742	0.671742	-0.000000	-0.001281	-0.672102	0.672102	-0.000000	-0.001281	-0.672102	0.672102
0.99	4096	-0.706305	0.706305	-0.000000	-0.232538	-0.665785	0.665785	0.000000	0.018222	-0.693759	0.693759	-0.000000	-0.028864	-0.706305	0.706305	-0.000000	-0.028864	-0.706305	0.706305
	16384	-0.687475	0.687475	-0.000000	-0.053099	-0.674995	0.674995	0.000000	-0.021406	-0.684884	0.684884	-0.000000	-0.011325	-0.687475	0.687475	-0.000000	-0.011325	-0.687475	0.687475
	65536	-0.675499	0.675499	-0.000000	-0.057650	-0.673530	0.673530	0.000000	-0.040208	-0.676000	0.676000	-0.000000	0.024259	-0.675499	0.675499	-0.000000	0.024259	-0.675499	0.675499

Tabela A. 10: Outros coeficientes Sobol com antitéticas

Modelo	L	$t = 10$					$t = 130$					$t = 270$				
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose			
-0.99	4096	-0.660124	0.685609	-0.003537	-0.018538	-0.672417	0.692223	-0.053716	0.029373	-0.674932	0.686133	-0.007337	-0.060425			
	16384	-0.676362	0.674794	-0.000750	-0.014500	-0.676676	0.687037	-0.029821	-0.015418	-0.670457	0.675746	-0.006046	-0.043518			
	65536	-0.683815	0.675893	0.000159	-0.008279	-0.681652	0.679827	-0.008601	0.005580	-0.674646	0.673424	0.003169	-0.020199			
-0.90	4096	-0.670285	0.663466	-0.004064	0.005588	-0.673681	0.666321	0.016925	0.047955	-0.679995	0.673341	0.019451	-0.073731			
	16384	-0.683552	0.669725	0.000728	-0.016500	-0.672670	0.678305	0.005794	0.023210	-0.679910	0.677997	0.006498	-0.048310			
	65536	-0.681402	0.675842	0.001055	-0.010503	-0.673356	0.672811	0.001658	0.005129	-0.676328	0.672944	-0.000952	-0.012192			
-0.50	4096	-0.658428	0.651551	0.012957	0.238998	-0.674089	0.681381	-0.001609	-0.061715	-0.675282	0.679313	0.004053	-0.030672			
	16384	-0.681208	0.673559	0.004490	-0.008649	-0.676066	0.680423	-0.001678	-0.008942	-0.679683	0.678225	-0.000215	-0.016443			
	65536	-0.676131	0.674259	0.001032	-0.003837	-0.674832	0.677118	-0.001108	-0.004137	-0.676196	0.674458	0.000108	-0.011144			
0.00	4096	-0.673928	0.673740	0.012856	0.016907	-0.673728	0.674871	-0.004809	-0.013482	-0.674310	0.674616	-0.000687	-0.016726			
	16384	-0.674335	0.674540	0.001469	-0.003906	-0.674468	0.674669	-0.000791	-0.007675	-0.674406	0.674527	-0.000158	-0.008854			
	65536	-0.674458	0.674453	0.000321	0.001246	-0.674457	0.674544	0.000110	-0.003205	-0.674367	0.674445	-0.000623	0.002856			
0.50	4096	-0.693153	0.701029	0.015497	-0.249886	-0.670072	0.682306	-0.001349	-0.049624	-0.675307	0.681204	0.002195	-0.025627			
	16384	-0.669312	0.675672	0.003487	-0.003830	-0.674690	0.674504	0.001600	-0.007037	-0.674660	0.674046	0.000061	0.008634			
	65536	-0.671972	0.673458	0.000474	0.005250	-0.674006	0.675514	0.001812	-0.003036	-0.673659	0.672676	-0.000252	0.013278			
0.90	4096	-0.676747	0.666549	0.002241	-0.058425	-0.677760	0.664958	0.015761	-0.075952	-0.663867	0.680819	-0.006565	0.069048			
	16384	-0.674613	0.679330	0.001961	-0.002050	-0.681975	0.677726	0.006909	-0.077467	-0.684349	0.683329	0.003662	0.037678			
	65536	-0.674542	0.676857	-0.000544	-0.002611	-0.676127	0.677074	-0.001803	-0.032493	-0.672931	0.671637	0.001601	0.011828			
0.99	4096	-0.672558	0.682534	-0.001054	-0.035485	-0.660940	0.682626	-0.049820	0.054513	-0.680963	0.674377	-0.053515	-0.005804			
	16384	-0.668975	0.682513	0.001277	-0.008064	-0.669545	0.684042	-0.003102	-0.010522	-0.666465	0.664770	-0.022412	0.122435			
	65536	-0.677380	0.679079	-0.000557	-0.005139	-0.670464	0.676620	0.008631	-0.009757	-0.673110	0.670738	-0.010955	0.055764			

Tabela A. 11: Outros coeficientes Sobol S

Modelo	L	$t = 10$				$t = 130$				$t = 270$			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
-0.99	4096	-0.685118	0.685118	-0.000000	-0.025724	-0.696199	0.696199	0.000000	-0.072132	-0.668763	0.668763	0.000000	-0.068320
	16384	-0.680219	0.680219	0.000000	-0.015334	-0.682120	0.682120	0.000000	-0.022125	-0.668475	0.668475	0.000000	-0.002166
	65536	-0.678766	0.678766	0.000000	-0.013625	-0.681254	0.681254	0.000000	0.006451	-0.676426	0.676426	0.000000	-0.051203
-0.90	4096	-0.674769	0.674769	0.000000	-0.036167	-0.665817	0.665817	0.000000	-0.108170	-0.678465	0.678465	-0.000000	-0.057219
	16384	-0.674122	0.674122	0.000000	0.007781	-0.672203	0.672203	0.000000	0.034751	-0.679137	0.679137	-0.000000	-0.038564
	65536	-0.675448	0.675448	0.000000	-0.015896	-0.672687	0.672687	0.000000	0.010654	-0.675159	0.675159	-0.000000	-0.024031
-0.50	4096	-0.657056	0.657056	0.000000	0.198697	-0.669502	0.669502	0.000000	-0.100346	-0.681454	0.681454	0.000000	0.009947
	16384	-0.657012	0.657012	-0.000000	0.232462	-0.680430	0.680430	0.000000	-0.047412	-0.681317	0.681317	0.000000	-0.006554
	65536	-0.676695	0.676695	0.000000	-0.004958	-0.676983	0.676983	0.000000	-0.005879	-0.676347	0.676347	0.000000	-0.009141
0.00	4096	-0.673777	0.673777	0.000000	-0.005168	-0.674579	0.674579	0.000000	-0.015189	-0.675136	0.675136	0.000000	0.002432
	16384	-0.674073	0.674073	0.000000	0.003786	-0.674468	0.674468	0.000000	-0.011410	-0.674495	0.674495	0.000000	-0.009775
	65536	-0.674437	0.674437	0.000000	0.002730	-0.674588	0.674588	0.000000	-0.007397	-0.674353	0.674353	0.000000	0.006410
0.50	4096	-0.692582	0.692582	-0.000000	-0.287527	-0.684845	0.684845	0.000000	-0.023692	-0.667318	0.667318	-0.000000	0.009730
	16384	-0.695580	0.695580	-0.000000	-0.252887	-0.676852	0.676852	-0.000000	-0.048678	-0.675888	0.675888	-0.000000	-0.000797
	65536	-0.672751	0.672751	-0.000000	0.013214	-0.673531	0.673531	-0.000000	-0.010679	-0.673604	0.673604	-0.000000	0.014879
0.90	4096	-0.675591	0.675591	0.000000	-0.029033	-0.681851	0.681851	-0.000000	-0.224233	-0.696217	0.696217	-0.000000	-0.028257
	16384	-0.673852	0.673852	0.000000	-0.053319	-0.673859	0.673859	-0.000000	-0.033817	-0.680751	0.680751	-0.000000	0.018753
	65536	-0.676743	0.676743	0.000000	-0.002469	-0.675933	0.675933	-0.000000	-0.041913	-0.674693	0.674693	-0.000000	0.023750
0.99	4096	-0.690670	0.690670	-0.000000	0.003623	-0.667326	0.667326	0.000000	0.132219	-0.678086	0.678086	-0.000000	0.011136
	16384	-0.674680	0.674680	-0.000000	-0.031137	-0.672222	0.672222	0.000000	0.042772	-0.672077	0.672077	-0.000000	0.043459
	65536	-0.676728	0.676728	-0.000000	-0.011536	-0.673392	0.673392	0.000000	-0.002666	-0.668361	0.668361	-0.000000	0.083349

Tabela A. 12: Outros coeficientes Sobol S com antitéticas

		sem antitéticas						com antitéticas					
α_1	L	10 rep			100 rep			1000 rep			10 rep		
		K-S	PIT		K-S	PIT		K-S	PIT		K-S	PIT	
-0.99	4096	1.000000	1.000000		1.000000	0.990000		1.000000	0.984000		1.000000	0.980000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.970000		1.000000	0.978000		1.000000	0.930000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.970000		0.999000	0.975000		1.000000	0.940000	
-0.90	4096	1.000000	0.900000		1.000000	0.960000		1.000000	0.977000		1.000000	0.950000	
	16384	1.000000	0.800000		1.000000	0.950000		1.000000	0.973000		1.000000	0.920000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.990000		1.000000	0.974000		1.000000	0.910000	
-0.50	4096	1.000000	1.000000		1.000000	1.000000		1.000000	0.985000		1.000000	0.970000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		0.999000	0.978000		1.000000	0.940000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		1.000000	0.981000		1.000000	0.930000	
0.00	4096	1.000000	0.900000		1.000000	0.980000		1.000000	0.972000		1.000000	0.950000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		1.000000	0.969000		1.000000	0.940000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.990000		1.000000	0.974000		1.000000	0.910000	
0.50	4096	1.000000	1.000000		1.000000	1.000000		1.000000	0.985000		1.000000	0.970000	
	16384	1.000000	0.900000		1.000000	0.980000		1.000000	0.979000		1.000000	0.920000	
	65536	1.000000	0.800000		1.000000	0.950000		1.000000	0.973000		1.000000	0.980000	
0.90	4096	1.000000	1.000000		1.000000	1.000000		1.000000	0.979000		1.000000	0.970000	
	16384	1.000000	1.000000		0.990000	0.950000		0.999000	0.975000		1.000000	0.930000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.960000		1.000000	0.979000		1.000000	0.940000	
0.99	4096	1.000000	0.900000		1.000000	0.970000		1.000000	0.980000		1.000000	0.960000	
	16384	1.000000	0.900000		1.000000	0.980000		1.000000	0.978000		1.000000	0.930000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		1.000000	0.973000		1.000000	0.930000	

Tabela A. 13: Testes ajuste PRN, t=10 (10,100 e 1000 réplicas)

α_1	L	sem antitéticas												com antitéticas					
		10 rep			100 rep			1000 rep			10 rep			100 rep			1000 rep		
		K-S	PIT		K-S	PIT		K-S	PIT		K-S	PIT		K-S	PIT		K-S	PIT	
-0.99	4096	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.979000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.960000	1.000000	1.000000	0.947000		
	16384	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.990000	1.000000	0.973000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.940000	1.000000	1.000000	0.938000		
	65536	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.990000	1.000000	0.975000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	0.927000		
-0.90	4096	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.990000	1.000000	0.978000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.970000	1.000000	1.000000	0.953000		
	16384	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.960000	1.000000	0.967000	1.000000	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	0.950000	1.000000	1.000000	0.941000		
	65536	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.980000	1.000000	0.975000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.920000	1.000000	1.000000	0.942000		
-0.50	4096	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	0.980000	1.000000	0.979000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.950000	1.000000	1.000000	0.961000		
	16384	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.950000	1.000000	0.969000	1.000000	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	0.960000	0.999000	1.000000	0.940000		
	65536	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.970000	1.000000	0.974000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.950000	1.000000	1.000000	0.938000		
0.00	4096	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.960000	1.000000	0.983000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.950000	1.000000	1.000000	0.956000		
	16384	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.976000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.930000	1.000000	1.000000	0.946000		
	65536	1.000000	1.000000	0.990000	0.980000	0.999000	0.999000	0.979000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.980000	1.000000	1.000000	0.939000		
0.50	4096	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.980000	0.999000	0.979000	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	1.000000	0.970000	1.000000	1.000000	0.961000		
	16384	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.970000	1.000000	0.974000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.950000	1.000000	1.000000	0.941000		
	65536	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	0.940000	1.000000	0.966000	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	1.000000	0.940000	1.000000	1.000000	0.950000		
0.90	4096	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	0.980000	1.000000	0.983000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.930000	1.000000	1.000000	0.948000		
	16384	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	0.940000	1.000000	0.972000	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	1.000000	0.970000	1.000000	1.000000	0.945000		
	65536	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.930000	1.000000	0.972000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.950000	1.000000	1.000000	0.933000		
0.99	4096	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.970000	1.000000	0.981000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.970000	1.000000	1.000000	0.956000		
	16384	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.940000	1.000000	0.965000	1.000000	1.000000	0.900000	1.000000	1.000000	0.900000	0.999000	1.000000	0.932000		
	65536	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.970000	1.000000	0.973000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.910000	1.000000	1.000000	0.929000		

Tabela A. 14: Testes ajuste PRN, t=130 (10,100 e 1000 réplicas)

		sem antitéticas						com antitéticas					
α_1	L	10 rep			100 rep			1000 rep			10 rep		
		K-S	PIT		K-S	PIT		K-S	PIT		K-S	PIT	
-0.99	4096	1.000000	1.000000		1.000000	0.960000		0.999000	0.978000		1.000000	0.960000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.990000		1.000000	0.976000		1.000000	0.940000	
	65536	1.000000	0.900000		1.000000	0.960000		0.999000	0.965000		1.000000	0.930000	
-0.90	4096	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		1.000000	0.976000		1.000000	0.970000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.990000		1.000000	0.969000		1.000000	0.950000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		1.000000	0.972000		1.000000	0.910000	
-0.50	4096	1.000000	0.900000		1.000000	0.970000		1.000000	0.982000		1.000000	0.950000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.970000		1.000000	0.977000		1.000000	0.950000	
	65536	1.000000	0.900000		1.000000	0.970000		0.999000	0.972000		1.000000	0.930000	
0.00	4096	1.000000	1.000000		1.000000	0.970000		1.000000	0.978000		1.000000	0.950000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		1.000000	0.977000		1.000000	0.950000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.970000		1.000000	0.978000		1.000000	0.970000	
0.50	4096	1.000000	1.000000		1.000000	0.970000		1.000000	0.974000		1.000000	0.960000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		1.000000	0.980000		1.000000	0.960000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.960000		1.000000	0.972000		1.000000	0.960000	
0.90	4096	1.000000	0.900000		1.000000	0.960000		1.000000	0.984000		1.000000	0.960000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.970000		1.000000	0.976000		1.000000	0.940000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.990000		1.000000	0.974000		1.000000	0.930000	
0.99	4096	1.000000	1.000000		1.000000	0.980000		1.000000	0.979000		1.000000	0.980000	
	16384	1.000000	1.000000		1.000000	0.960000		1.000000	0.975000		1.000000	0.950000	
	65536	1.000000	1.000000		1.000000	0.960000		1.000000	0.977000		1.000000	0.920000	

Tabela A. 15: Testes ajuste PRN, t=270 (10,100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	sem antitéticas												com antitéticas					
		$t = 10$			$t = 130$			$t = 270$			$t = 10$			$t = 130$			$t = 270$		
		K-S	PTT		K-S	PTT		K-S	PTT		K-S	PTT		K-S	PTT		K-S	PTT	
-0.99	4096	0.888018	0.071800	0.000000	0.684987	0.025696	0.000000	0.988779	0.983060	0.002976	0.174249	0.936819	0.000000						
-0.99	16384	0.986576	0.008425	0.000302	0.950831	0.000003	0.000000	0.999661	0.153564	0.006991	0.993834	0.076595	0.000000						
-0.99	65536	0.998706	0.282764	0.000000	0.931870	0.000014	0.000000	0.999635	0.033295	0.000000	0.760684	0.020325	0.000000						
-0.90	4096	0.998114	0.000000	0.000000	0.636814	0.000000	0.000000	0.998836	0.000000	0.000000	0.616996	0.000000	0.000000						
-0.90	16384	0.954075	0.000000	0.000000	0.877498	0.000000	0.000000	0.904216	0.005882	0.000000	0.534076	0.000000	0.000000						
-0.90	65536	0.973038	0.000000	0.000000	0.775050	0.000000	0.000000	0.999334	0.000000	0.000000	0.996758	0.000000	0.000000						
-0.50	4096	0.320380	0.000000	0.000352	0.004348	0.000000	0.000000	0.482738	0.000001	0.096371	0.356367	0.000000	0.000000						
-0.50	16384	0.820658	0.000000	0.000000	0.707180	0.000000	0.000000	0.841099	0.000000	0.000000	0.332768	0.000000	0.000000						
-0.50	65536	0.997519	0.000000	0.000000	0.987266	0.000000	0.000000	0.996222	0.000000	0.000000	0.992300	0.000000	0.000000						
0.00	4096	1.000000	0.312767	0.000070	0.999998	0.410682	0.000003	1.000000	0.509786	0.005043	1.000000	0.161549	0.000000						
0.00	16384	1.000000	0.999938	0.136835	1.000000	0.999981	0.810138	1.000000	0.999993	0.109137	1.000000	0.993001	0.202483						
0.00	65536	1.000000	0.992147	0.995646	1.000000	0.996621	0.999863	1.000000	0.955385	0.999611	1.000000	0.827961	0.99814						
0.50	4096	0.978039	0.000054	0.000198	0.962368	0.000000	0.000000	0.996302	0.804635	0.000296	0.999141	0.562519	0.000000						
0.50	16384	0.975474	0.000000	0.000000	0.985536	0.000000	0.000000	0.999987	0.000000	0.059872	0.999994	0.000000	0.000001						
0.50	65536	0.999668	0.000000	0.000000	0.999580	0.000000	0.000000	0.999996	0.107368	0.000000	0.998571	0.009155	0.000000						
0.90	4096	0.260788	0.000000	0.000000	0.000524	0.000000	0.000000	0.498872	0.041919	0.000000	0.649522	0.000000	0.000000						
0.90	16384	0.721241	0.000000	0.000000	0.540800	0.000000	0.000000	0.618705	0.000000	0.000000	0.107505	0.000000	0.000000						
0.90	65536	0.985876	0.000000	0.000000	0.794816	0.000000	0.000000	0.852695	0.000000	0.000000	0.957830	0.000000	0.000000						
0.99	4096	0.388022	0.000000	0.000000	0.743139	0.000000	0.000000	0.537312	0.000000	0.000000	0.449075	0.000000	0.000000						
0.99	16384	0.909373	0.000000	0.000000	0.604520	0.000000	0.000000	0.851540	0.000000	0.000000	0.870902	0.000000	0.000000						
0.99	65536	0.892821	0.000000	0.000000	0.869695	0.000000	0.000000	0.970657	0.000000	0.000000	0.428225	0.000000	0.000000						

Tabela A. 16: Testes ajuste Halton

Modelo	L	sem antitéticas						com antitéticas					
		$t = 10$			$t = 130$			$t = 270$			$t = 10$		
		K-S	PIT	PIT	K-S	PIT	PIT	K-S	PIT	PIT	K-S	PIT	PIT
-0.99	4096	0.971609	0.701109	0.891705	0.456416	0.986828	0.126555	0.982181	0.994571	0.529656	0.750910	0.999877	0.222660
-0.99	16384	0.819255	0.977189	0.518961	0.093142	0.979816	0.062709	0.897971	0.997300	0.984774	0.879977	0.999997	0.993076
-0.99	65536	0.929658	0.995703	0.351918	0.422710	0.982834	0.041417	0.656410	0.947315	0.741758	0.533331	0.888634	0.681466
-0.90	4096	0.945814	0.862033	0.860797	0.698570	0.201046	0.187012	0.971365	0.582779	0.993259	0.555038	0.341004	0.999975
-0.90	16384	0.741098	0.960332	0.965613	0.889307	0.921601	0.261851	0.929412	0.998104	0.914706	0.935469	0.954459	0.706549
-0.90	65536	0.980632	0.995665	0.606400	0.994631	0.631028	0.765619	0.852309	0.999867	0.665884	0.763083	0.363826	0.929586
-0.50	4096	0.761783	0.999125	0.999469	0.705082	0.987437	0.744114	0.761755	0.980920	0.985731	0.805269	0.776689	0.228992
-0.50	16384	0.989078	0.993514	0.999999	0.986503	0.841086	0.997043	0.253232	1.000000	0.999922	0.119350	0.999167	0.866968
-0.50	65536	0.999971	0.999999	0.999989	0.999643	0.999973	0.904231	0.999901	0.998364	1.000000	0.997954	0.996898	0.999980
0.00	4096	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.00	16384	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.00	65536	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.50	4096	0.744031	0.999947	0.999964	0.862160	0.726951	0.997559	0.811350	0.999952	0.973544	0.458723	0.987931	0.940782
0.50	16384	0.999959	0.949020	0.999972	0.881046	0.957510	0.997882	0.209057	0.999923	1.000000	0.033767	0.997142	0.996664
0.50	65536	0.998475	0.999300	0.999997	0.783869	0.963595	0.942409	1.000000	0.978090	0.999998	0.899134	0.999974	0.939384
0.90	4096	0.856402	0.821449	0.777445	0.432331	0.872652	0.385872	0.656530	0.956675	0.932714	0.026511	0.712569	0.710576
0.90	16384	0.913919	0.978516	0.995741	0.994208	0.558407	0.625645	0.968978	0.731619	0.921084	0.337476	0.886936	0.037927
0.90	65536	0.945039	0.788609	0.965297	0.933749	0.395217	0.784474	0.956983	0.925361	0.927613	0.948721	0.370337	0.605999
0.99	4096	0.507783	0.920908	0.653781	0.475493	0.554042	0.291280	0.221492	0.184019	0.872868	0.024986	0.416366	0.780443
0.99	16384	0.803459	0.448540	0.196009	0.395666	0.171206	0.057952	0.740132	0.647417	0.712120	0.321759	0.644701	0.739111
0.99	65536	0.992941	0.973614	0.155444	0.281477	0.964771	0.027224	0.892768	0.979025	0.889951	0.714393	0.655640	0.612607

Tabela A. 17: Testes ajuste Sobol

Tabela A. 18: Testes ajuste Sobol S

Modelo	L	sem antitéticas												com antitéticas					
		$t = 10$			$t = 130$			$t = 270$			$t = 10$			$t = 130$			$t = 270$		
		K-S	PT	PTT	K-S	PT	PTT	K-S	PT	PTT	K-S	PT	PTT	K-S	PT	PTT	K-S	PT	PTT
-0.99	4096	0.990710	0.844264	0.954773	0.815989	0.287122	0.980988	0.998789	0.671647	0.984976	0.999802	0.003765	0.522967						
-0.99	16384	0.960854	0.498070	0.969064	0.378354	0.202291	0.727457	0.965790	0.688809	0.967067	0.890736	0.032209	0.940025						
-0.99	65536	0.443879	0.387873	0.995876	0.005074	0.190708	0.432775	0.913580	0.547489	0.898856	0.450198	0.021766	0.883032						
-0.90	4096	0.996582	0.994542	0.996689	0.811993	0.848862	0.971739	0.994117	0.843286	0.885785	0.980725	0.100880	0.807520						
-0.90	16384	0.759951	0.933556	0.944890	0.356826	0.940166	0.425452	0.999999	0.999198	0.992743	0.999522	0.985114	0.875976						
-0.90	65536	0.623017	0.966212	0.987539	0.173686	0.985417	0.655885	0.961095	0.678446	0.999059	0.976436	0.653806	0.973378						
-0.50	4096	0.475516	0.997514	0.999641	0.652063	0.927605	0.985110	0.711088	0.999708	0.963484	0.837193	0.599757	0.480673						
-0.50	16384	0.999765	0.962880	0.999976	0.999420	0.775490	0.820255	0.223380	0.978818	0.999611	0.647810	0.429722	0.999765						
-0.50	65536	0.999892	0.999946	0.999653	0.973601	0.999256	0.802452	0.999971	0.999999	0.999777	0.999982	0.988833	0.909470						
0.00	4096	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000						
0.00	16384	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000						
0.00	65536	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000						
0.50	4096	0.657579	0.996466	0.998430	0.422535	0.916790	0.949713	0.904755	0.992681	0.974611	0.409812	0.314179	0.992245						
0.50	16384	0.999977	0.997927	0.999695	0.996561	0.969951	0.997622	0.223328	0.990626	0.999954	0.445737	0.756724	0.998536						
0.50	65536	0.959646	0.997012	0.999275	0.985954	0.903806	0.994059	0.999996	0.996305	0.982483	0.989464	0.529526	0.999994						
0.90	4096	0.708113	0.981429	0.900902	0.434125	0.547088	0.784644	0.965137	0.980498	0.528529	0.770552	0.850501	0.645456						
0.90	16384	0.439149	0.952104	0.755531	0.092525	0.786927	0.333438	0.980602	0.999427	0.945365	0.421808	0.83205	0.215634						
0.90	65536	0.991123	0.876184	0.962019	0.884951	0.716425	0.380543	0.972700	0.931781	0.961775	0.728568	0.742712	0.104812						
0.99	4096	0.540282	0.971102	0.996257	0.419885	0.934921	0.977243	0.993910	0.995215	0.999321	0.975898	0.997493	0.999989						
0.99	16384	0.430071	0.967059	0.962710	0.010541	0.748646	0.667028	0.855347	0.988514	0.999823	0.772015	0.999029	0.999876						
0.99	65536	0.584800	0.977349	0.956182	0.212483	0.263460	0.728298	0.904164	0.999554	0.800722	0.255823	0.274798	0.780050						

A.4 Tabelas do modelo GARCH

Modelo	L	10 rep				100 rep				1000 rep			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
GARCH	4096	-0.672008	0.673457	-0.00478	0.00693	-0.671078	0.672716	-0.000977	0.012007	-0.673737	0.673476	-0.000127	0.010801
	16384	-0.669674	0.673571	-0.00478	0.00693	-0.673835	0.674235	-0.000977	0.012007	-0.674052	0.67391	-0.000127	0.010801
	65536	-0.673784	0.673807	-0.000127	0.010801	-0.673784	0.673807	-0.000127	0.010801	-0.673784	0.673807	-0.000127	0.010801
NGARCH	4096	-0.668832	0.67018	-0.005406	0.09443	-0.6676	0.668137	-0.00094	0.096195	-0.669313	0.668686	-4.5e-05	0.095108
	16384	-0.666648	0.670233	-0.005406	0.09443	-0.669104	0.669724	-0.00094	0.096195	-0.669428	0.669202	-4.5e-05	0.095108
	65536	-0.66919	0.669131	-4.5e-05	0.095108	-0.66919	0.669131	-4.5e-05	0.095108	-0.66919	0.669131	-4.5e-05	0.095108

Tabela A. 19: Outros coeficientes PRN, t=10 (10, 100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	10 rep				100 rep				1000 rep			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
GARCH	4096	-0.675222	0.675597	-1e-06	0.00619	-0.674569	0.673568	-1e-06	0.008951	-0.674332	0.673797	-1e-06	0.009063
	16384	-0.672193	0.671675	-1e-06	0.00619	-0.674048	0.673358	-1e-06	0.008951	-0.673826	0.67375	-1e-06	0.009063
	65536	-0.673862	0.673861	-1e-06	0.009063	-0.673862	0.673861	-1e-06	0.009063	-0.673862	0.673861	-1e-06	0.009063
NGARCH	4096	-0.668005	0.66946	-6.2e-05	0.093769	-0.668839	0.668986	0.000321	0.093818	-0.669624	0.6693	0.000125	0.093572
	16384	-0.66733	0.666538	-6.2e-05	0.093769	-0.669181	0.668673	0.000321	0.093818	-0.669322	0.669193	0.000125	0.093572
	65536	-0.669265	0.6692	0.000125	0.093572	-0.669265	0.6692	0.000125	0.093572	-0.669265	0.6692	0.000125	0.093572

Tabela A. 20: Outros coeficientes PRN com antitéticas, t=10 (10, 100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	10 rep				100 rep				1000 rep			
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
GARCH	4096	-0.668201	0.670064	0.004989	0.011939	-0.675336	0.675055	0.000991	0.010305	-0.673945	0.673826	-0.000165	0.009435
	16384	-0.674257	0.669653	0.004989	0.011939	-0.674679	0.673065	0.000991	0.010305	-0.674083	0.673623	-0.000165	0.009435
	65536	-0.67387	0.673637	-0.000165	0.009435	-0.67387	0.673637	-0.000165	0.009435	-0.67387	0.673637	-0.000165	0.009435
NGARCH	4096	-0.664171	0.663	0.006505	0.098444	-0.670564	0.669036	0.001211	0.09612	-0.66907	0.669106	-0.000227	0.094579
	16384	-0.669077	0.665003	0.006505	0.098444	-0.669765	0.668209	0.001211	0.09612	-0.669428	0.668924	-0.000227	0.094579
	65536	-0.66916	0.668949	-0.000227	0.094579	-0.66916	0.668949	-0.000227	0.094579	-0.66916	0.668949	-0.000227	0.094579

Tabela A. 21: Outros coeficientes PRN, t=130 (10, 100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	10 rep					100 rep					1000 rep				
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose			
GARCH	4096	-0.667186	0.668659	0	0.005728	-0.674186	0.67499	-1e-06	0.0079	-0.673416	0.673945	-1e-06	0.008834			
	16384	-0.674627	0.672863	0	0.005728	-0.67392	0.673715	-1e-06	0.0079	-0.67366	0.673776	-1e-06	0.008834			
	65536	-0.673874	0.673879	-1e-06	0.008834	-0.673874	0.673879	-1e-06	0.008834	-0.673874	0.673879	-1e-06	0.008834			
NGARCH	4096	-0.665999	0.664285	-0.000311	0.092109	-0.669315	0.671235	-0.000335	0.09243	-0.668754	0.669399	-0.000188	0.093265			
	16384	-0.670622	0.668833	-0.000311	0.092109	-0.669508	0.669591	-0.000335	0.09243	-0.669041	0.669206	-0.000188	0.093265			
	65536	-0.66929	0.669313	-0.000188	0.093265	-0.66929	0.669313	-0.000188	0.093265	-0.66929	0.669313	-0.000188	0.093265			

Tabela A. 22: Outros coeficientes PRN, com antitéticas, t=130 (10, 100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	10 rep					100 rep					1000 rep				
		Q1	Q3	Assimetria	Curiose		Q1	Q3	Assimetria	Curiose		Q1	Q3	Assimetria	Curiose	
GARCH	4096	-0.679712	0.6645	0.000423	0.008784		-0.674718	0.672117	-0.000333	0.008407		-0.673575	0.67384	0.000378	0.009499	
	16384	-0.676875	0.671958	0.000423	0.008784		-0.673956	0.674118	-0.000333	0.008407		-0.67395	0.673947	0.000378	0.009499	
	65536	-0.673925	0.673791	0.000378	0.009499		-0.673925	0.673791	0.000378	0.009499		-0.673925	0.673791	0.000378	0.009499	
NGARCH	4096	-0.671689	0.662256	0.00129	0.089891		-0.67024	0.668049	-0.000758	0.09364		-0.669182	0.669412	0.000311	0.094142	
	16384	-0.672434	0.66842	0.00129	0.089891		-0.669294	0.669689	-0.000758	0.09364		-0.669369	0.669284	0.000311	0.094142	
	65536	-0.669333	0.669112	0.000311	0.094142		-0.669333	0.669112	0.000311	0.094142		-0.669333	0.669112	0.000311	0.094142	

Tabela A. 23: Outros coeficientes PRN, t=270 (10, 100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	10 rep					100 rep					1000 rep				
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose		Q1	Q3	Assimetria	Curtose		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	
GARCH	4096	-0.672298	0.672596	-1e-06	0.013204	-0.672265	-0.672265	0.673227	-1e-06	0.00933	-0.673999	0.673833	0.673833	-1e-06	0.007333	
	16384	-0.672064	0.674718	-1e-06	0.013204	-0.673499	-0.673499	0.674233	-1e-06	0.00933	-0.674297	0.673753	0.673753	-1e-06	0.007333	
	65536	-0.674028	0.67403	-1e-06	0.007333	-0.674028	-0.674028	0.67403	-1e-06	0.007333	-0.674028	0.67403	0.67403	-1e-06	0.007333	
NGARCH	4096	-0.66846	0.669664	0.000107	0.095277	-0.668116	-0.668116	0.668958	-2.6e-05	0.094201	-0.669282	0.669313	0.669313	0.00015	0.091617	
	16384	-0.667786	0.669573	0.000107	0.095277	-0.669005	-0.669005	0.669755	-2.6e-05	0.094201	-0.669516	0.669149	0.669149	0.00015	0.091617	
	65536	-0.669462	0.669469	0.00015	0.091617	-0.669462	-0.669462	0.669469	0.00015	0.091617	-0.669462	0.669469	0.669469	0.00015	0.091617	

Tabela A. 24: Outros coeficientes PRN, com antitéticas, t=270 (10, 100 e 1000 réplicas)

Modelo	L	$t = 10$			$t = 130$			$t = 270$					
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
GARCH	4096	-0.677171	0.675627	0.001579	-0.031836	-0.673517	0.677498	-0.043128	-0.033973	-0.67513	0.674791	0.002985	-0.037576
	16384	-0.674234	0.674798	8e-05	-0.00816	-0.672214	0.677164	-0.041964	-0.009668	-0.674055	0.67389	0.001004	-0.005324
	65536	-0.674155	0.674154	0.000466	0.003763	-0.67391	0.674051	0.00032	0.002751	-0.673967	0.674049	0.000472	0.003124
NGARCH	4096	-0.669375	0.669647	0.009779	0.033063	-0.661261	0.678801	-0.124231	0.074001	-0.668528	0.67763	0.007646	0.016637
	16384	-0.670053	0.670179	0.001395	0.058536	-0.661462	0.680457	-0.121051	0.087438	-0.666564	0.673798	-0.001724	0.074936
	65536	-0.669825	0.66996	0.002113	0.080788	-0.665428	0.672457	-0.004328	0.079072	-0.669482	0.669538	0.001536	0.08025

Tabela A. 25: Outros coeficientes Sobol

Modelo	L	t = 10			t = 130			t = 270					
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
GARCH	4096	-0.677222	0.677338	1e-06	-0.054582	-0.675636	0.675659	2e-06	-0.058333	-0.676184	0.676122	-9e-06	-0.063205
	16384	-0.674505	0.674458	1e-06	-0.018362	-0.674161	0.674179	1e-06	-0.017575	-0.674598	0.674589	0	-0.01516
	65536	-0.674208	0.674138	0	0.000381	-0.673933	0.673817	0	-0.000733	-0.674113	0.674091	0	0.000181
NGARCH	4096	-0.671125	0.673188	0.008051	0.03089	-0.665899	0.671731	-0.003112	0.012351	-0.667407	0.673895	0.000854	-0.000551
	16384	-0.671145	0.670351	0.003333	0.053585	-0.665744	0.673603	-0.003517	0.058003	-0.666894	0.674648	-0.005655	0.071952
	65536	-0.670283	0.669894	0.000709	0.080341	-0.665792	0.673152	-0.00561	0.079279	-0.668434	0.669895	-0.000479	0.078577

Tabela A. 26: Outros coeficientes Sobol com antitéticas

Modelo	L	$t = 10$			$t = 130$			$t = 270$					
		Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
GARCH	4096	-0.676324	0.671997	-0.007302	0.007721	-0.67578	0.676283	-0.04187	-0.004291	-0.675038	0.672626	-0.000363	0.018581
	16384	-0.673879	0.673537	0.001089	0.014964	-0.670986	0.676956	-0.041146	0.003412	-0.674776	0.672404	0.001291	0.005815
	65536	-0.673893	0.67356	-8.8e-05	0.009938	-0.673621	0.673534	-0.000285	0.018355	-0.673947	0.673991	0.000965	0.00472
NGARCH	4096	-0.669682	0.668579	-0.011003	0.108042	-0.665841	0.67612	-0.109802	0.014975	-0.670826	0.670938	-0.001596	0.124256
	16384	-0.667702	0.669514	-8.1e-05	0.120936	-0.665729	0.675416	-0.110831	0.020559	-0.670221	0.671413	0.003677	0.12359
	65536	-0.669158	0.669182	-0.001331	0.098627	-0.669927	0.670384	0.000168	0.052543	-0.669759	0.669198	0.000463	0.092317

Tabela A. 27: Outros coeficientes Sobol S

Modelo	L	t = 10			t = 130			t = 270			Assimetria	Curtose	Q1	Q3	Assimetria	Curtose
		Q1	Q3	L	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	L	Assimetria	Curtose	Q1	Q3	L	Assimetria	Curtose
GARCH	4096	-0.674963	0.675028	0.04436	-2e-06	0.04436	-0.673525	0.67365	0.00287	1e-06	0.00287	-0.672983	0.673052	-3e-06	0.032426	0.032426
	16384	-0.674056	0.673983	0.004625	-1e-06	0.004625	-0.673331	0.673412	0.010676	1e-06	0.010676	-0.673543	0.673651	-1e-06	0.007774	0.007774
	65536	-0.673972	0.673908	0.007121	-1e-06	0.007121	-0.673591	0.673567	0.010383	-1e-06	0.010383	-0.673875	0.67389	-1e-06	0.006562	0.006562
NGARCH	4096	-0.669804	0.669122	0.141281	-0.002354	0.141281	-0.675769	0.667197	0.108848	0.013935	0.108848	-0.668905	0.667345	0.000978	0.152015	0.152015
	16384	-0.669246	0.669691	0.085534	-0.001974	0.085534	-0.67332	0.666584	0.081918	0.006247	0.081918	-0.669112	0.668611	-0.001225	0.097935	0.097935
	65536	-0.669217	0.66915	0.097564	-0.000652	0.097564	-0.66925	0.669038	0.094712	0.000359	0.094712	-0.66975	0.6693	0.00165	0.09276	0.09276

Tabela A. 28: Outros coeficientes Sobol S com antitéticas

		sem antitéticas						com antitéticas					
		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$	
Modelo	L	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT
GARCH	4096	1	1	1	0.98	1	0.978	1	1	1	0.99	1	0.982
	16384	1	1	1	0.98	1	0.973	1	1	1	0.96	1	0.964
	65536	1	1	1	0.95	0.999	0.975	1	0.9	1	0.96	1	0.945
NGARCH	4096	1	1	1	0.99	1	0.975	1	1	1	1	1	0.974
	16384	1	1	1	0.95	1	0.96	1	0.9	1	0.96	1	0.954
	65536	1	0.9	1	0.93	0.993	0.914	1	0.8	1	0.93	0.991	0.894

Tabela A. 29: Testes ajuste PRN, t=10 (10,100 e 1000 réplicas)

		sem antitéticas						com antitéticas					
		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$	
Modelo	L	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT
GARCH	4096	1	1	1	0.97	1	0.983	1	0.9	1	0.98	0.999	0.98
	16384	1	1	1	0.97	0.998	0.963	1	0.9	1	0.94	1	0.973
	65536	1	1	1	0.97	1	0.96	1	0.8	1	0.9	1	0.928
NGARCH	4096	1	1	1	0.99	0.999	0.98	1	1	0.99	0.97	0.999	0.976
	16384	1	0.9	1	0.92	0.997	0.946	1	0.9	1	0.93	0.999	0.959
	65536	1	0.9	1	0.89	0.997	0.896	1	0.8	0.99	0.89	0.994	0.887

Tabela A. 30: Testes ajuste PRN, t=130 (10,100 e 1000 réplicas)

		sem antitéticas						com antitéticas					
		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$	
Modelo	L	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT	K-S	PTT
GARCH	4096	1	1	1	0.97	1	0.976	1	1	1	0.96	1	0.98
	16384	0.9	0.9	0.99	0.95	0.999	0.971	1	0.9	1	0.97	1	0.975
	65536	1	1	1	0.98	1	0.978	1	0.9	1	0.95	1	0.939
NGARCH	4096	1	0.8	1	0.95	0.999	0.969	1	0.9	1	0.98	1	0.976
	16384	0.9	0.9	0.99	0.93	0.998	0.963	1	1	1	0.98	1	0.961
	65536	1	0.8	0.98	0.89	0.986	0.903	1	0.8	0.99	0.88	0.993	0.885

		sem antitéticas						com antitéticas					
		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$	
Modelo	L	K-S	PIT	K-S	PIT	K-S	PIT	K-S	PIT	K-S	PIT	K-S	PIT
GARCH	4096	1	0.999443	1	0.999999	0.99941	1	1	1	1	1	1	1
	16384	1	0.699976	1	1	0.998987	1	1	1	1	1	1	1
	65536	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
NGARCH	4096	1	0.464765	1	1	0.366039	0.999775	1	0.99998	1	0.999988	0.99896	0.9999
	16384	0.999994	0.007431	0.992664	1	0	0.996509	0.999996	0.924485	0.993114	1	0.071013	0.99726
	65536	0.961379	0.199503	0.95861	0.999868	0	0.999863	0.949735	0.191462	0.938607	0.999558	0	0.999234

Tabela A. 32: Testes ajuste Sobol

		sem antitéticas						com antitéticas					
		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$		$t = 10$		$t = 130$		$t = 270$	
Modelo	L	K-S	PIT	K-S	PIT	K-S	PIT	K-S	PIT	K-S	PIT	K-S	PIT
GARCH	4096	1	0.999538	1	1	0.997426	1	1	1	1	0.999953	0.999986	0.999998
	16384	1	0.711781	1	1	0.998202	1	1	1	1	1	1	1
	65536	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
NGARCH	4096	1	0.481052	0.999993	0.999997	0.448161	0.999585	1	0.999984	1	0.999983	0.999455	0.99994
	16384	0.999966	0.007315	0.892706	1	5.5e-05	0.968648	0.99993	0.963527	0.999062	1	0.35252	0.999994
	65536	0.963399	0.623081	0.950315	0.999904	0.058294	0.999721	0.955501	0.940607	0.957227	0.99982	0.999593	0.999773

Tabela A. 33: Testes ajuste Sobol S

Apêndice B. Anexos do Capítulo 5

B.1 Códigos LSMC

```
#####
## Esta biblioteca implementa o modelo do LSM para a avaliação de opções
## cujo ativo subjacente segue um processo da família GARCH.
##
## A regressão pode ser feita por SVD ou regressão linear.
##
## As bases são fixas e de acordo com o paper de:
##
## STENTOF, L., 2005. Pricing American options when the underlying asset
## follows GARCH processes. Journal of Empirical Finance, 12(4), pp.576611.
##
## O código inclui otimizações por vectorização sempre que for possível
##
#####
require(corpcor)

put_value_lsmc_garch <- function(prices, cond_vol, s0, k, rf, degree,
                                dosvd=FALSE){

  if (missing(prices)) {
    stop("The prices matrix must be specified!")
  }
  if (missing(cond_vol)) {
    stop("The conditional volatility matrix must be specified!")
  }
  if (missing(s0)) {
    stop("The spot price must be specified!")
  }
}
```

```

}
if (missing(k)) {
  stop("The option strike price must be specified!")
}
if (missing(degree)){
  stop("The regression polinomial degree must be specified!")
}
if ((degree < 2) && (degree > 6)){
  stop("The regression polinomial degree must be higher than 2, and smaller than 6!")
}
if (missing(rf)) {
  stop("The risk-free rate must be specified!")
}

ntsteps<-NCOL(prices)
paths<-NROW(prices)

rf <- log(1 + rf/360) # Taxa de rendibilidade isenta de risco diária

cash_flow <- rep(0, paths)
exercise <- rep(0, paths)

cash_flow <- exp(-rf) * pmax(k - prices[, ntsteps], 0)

for (n in (ntsteps-1):1){
  exercise <- pmax(k - prices[, n], 0)
  continuation <- rep(0, paths)
  if (length(exercise[exercise > 0]) > (3 * degree + 1)){
    # Só caminhos in the money
    y <- cash_flow[exercise > 0]
    x_1 <- prices[exercise > 0, n]
    x_2 <- cond_vol[exercise > 0, n]

    if (dosvd == TRUE){
      ones <- rep(1, length(x_1))
      x <- switch(degree,
        "2" = cbind(ones, x_1, x_2, x_1*x_2, x_1^2, x_2^2, (x_1*x_2)^2),
        "3" = cbind(ones, x_1, x_2, x_1*x_2, x_1^2, x_2^2, (x_1*x_2)^2,
                    x_1^3, x_2^3, (x_1*x_2)^3),
        "4" = cbind(ones, x_1, x_2, x_1*x_2, x_1^2, x_2^2, (x_1*x_2)^2,
                    x_1^3, x_2^3, (x_1*x_2)^3,

```



```

      x_1^4, x_2^4, (x_1*x_2)^4),
"5" = cbind(ones, x_1, x_2, x_1*x_2, x_1^2, x_2^2, (x_1*x_2)^2,
      x_1^3, x_2^3, (x_1*x_2)^3,
      x_1^4, x_2^4, (x_1*x_2)^4,
      x_1^5, x_2^5, (x_1*x_2)^5),
"6" = cbind(ones, x_1, x_2, x_1*x_2, x_1^2, x_2^2, (x_1*x_2)^2,
      x_1^3, x_2^3, (x_1*x_2)^3,
      x_1^4, x_2^4, (x_1*x_2)^4,
      x_1^5, x_2^5, (x_1*x_2)^5,
      x_1^6, x_2^6, (x_1*x_2)^6))

s <- svd(x)
# Coeficientes
betas <- (s$v%*%pseudoinverse(diag(s$d))%*(t(s$u))%*%y
} else {
reg <- switch(degree,
  "2" = lm(y ~ 1 + x_1 + x_2 + I(x_1*x_2) +
    I(x_1^2) + I(x_2^2) + I((x_1*x_2)^2)),
  "3" = lm(y ~ 1 + x_1 + x_2 + I(x_1*x_2) +
    I(x_1^2) + I(x_2^2) + I((x_1*x_2)^2) +
    I(x_1^3) + I(x_2^3) + I((x_1*x_2)^3)),
  "4" = lm(y ~ 1 + x_1 + x_2 + I(x_1*x_2) +
    I(x_1^2) + I(x_2^2) + I((x_1*x_2)^2) +
    I(x_1^3) + I(x_2^3) + I((x_1*x_2)^3) +
    I(x_1^4) + I(x_2^4) + I((x_1*x_2)^4)),
  "5" = lm(y ~ 1 + x_1 + x_2 + I(x_1*x_2) +
    I(x_1^2) + I(x_2^2) + I((x_1*x_2)^2) +
    I(x_1^3) + I(x_2^3) + I((x_1*x_2)^3) +
    I(x_1^4) + I(x_2^4) + I((x_1*x_2)^4) +
    I(x_1^5) + I(x_2^5) + I((x_1*x_2)^5)),
  "6" = lm(y ~ 1 + x_1 + x_2 + I(x_1*x_2) +
    I(x_1^2) + I(x_2^2) + I((x_1*x_2)^2) +
    I(x_1^3) + I(x_2^3) + I((x_1*x_2)^3) +
    I(x_1^4) + I(x_2^4) + I((x_1*x_2)^4) +
    I(x_1^5) + I(x_2^5) + I((x_1*x_2)^5) +
    I(x_1^6) + I(x_2^6) + I((x_1*x_2)^6)))

betas <- coefficients(reg)
}

# Estimar valor de continuação
# apenas onde o valor de exercício é maior do que zero
# e se a regressão correu

```

```

aux_paths <- which(exercise>0)
aux_1 <- prices[aux_paths, n]
aux_2 <- cond_vol[aux_paths, n]

continuation[aux_paths] <- switch(degree,
  "2" = betas[1] + betas[2]*aux_1 + betas[3]*aux_2 +
        betas[4]*aux_1*aux_2 +
        betas[5]*(aux_1^2) + betas[6]*(aux_2^2) +
        betas[7]*((aux_1*aux_2)^2),
  "3" = betas[1] + betas[2]*aux_1 + betas[3]*aux_2 +
        betas[4]*aux_1*aux_2 +
        betas[5]*(aux_1^2) + betas[6]*(aux_2^2) +
        betas[7]*((aux_1*aux_2)^2) +
        betas[8]*(aux_1^3) + betas[9]*(aux_2^3) +
        betas[10]*((aux_1*aux_2)^3),
  "4" = betas[1] + betas[2]*aux_1 + betas[3]*aux_2 +
        betas[4]*aux_1*aux_2 +
        betas[5]*(aux_1^2) + betas[6]*(aux_2^2) +
        betas[7]*((aux_1*aux_2)^2) +
        betas[8]*(aux_1^3) + betas[9]*(aux_2^3) +
        betas[10]*((aux_1*aux_2)^3) +
        betas[11]*(aux_1^4) + betas[12]*(aux_2^4) +
        betas[13]*((aux_1*aux_2)^4),
  "5" = betas[1] + betas[2]*aux_1 + betas[3]*aux_2 +
        betas[4]*aux_1*aux_2 +
        betas[5]*(aux_1^2) + betas[6]*(aux_2^2) +
        betas[7]*((aux_1*aux_2)^2) +
        betas[8]*(aux_1^3) + betas[9]*(aux_2^3) +
        betas[10]*((aux_1*aux_2)^3) +
        betas[11]*(aux_1^4) + betas[12]*(aux_2^4) +
        betas[13]*((aux_1*aux_2)^4) +
        betas[14]*(aux_1^5) + betas[15]*(aux_2^5) +
        betas[16]*((aux_1*aux_2)^5),
  "6" = betas[1] + betas[2]*aux_1 + betas[3]*aux_2 +
        betas[4]*aux_1*aux_2 +
        betas[5]*(aux_1^2) + betas[6]*(aux_2^2) +
        betas[7]*((aux_1*aux_2)^2) +
        betas[8]*(aux_1^3) + betas[9]*(aux_2^3) +
        betas[10]*((aux_1*aux_2)^3) +
        betas[11]*(aux_1^4) + betas[12]*(aux_2^4) +
        betas[13]*((aux_1*aux_2)^4) +

```

```

        betas[14]*(aux_1^5) + betas[15]*(aux_2^5) +
        betas[16]*((aux_1*aux_2)^5) +
        betas[17]*(aux_1^6) + betas[18]*(aux_2^6) +
        betas[19]*((aux_1*aux_2)^6))
    }
    # Caminhos onde exercise > continuation
    aux_paths <- which(exercise>continuation)
    cash_flow[aux_paths] <- exercise[aux_paths]
    cash_flow <- exp(-rf) * cash_flow
  }
  option_value <- max(mean(cash_flow), max(k - s0, 0))
  stderror <- sd(cash_flow)/sqrt(paths)
  return(list(value=option_value, stderror=stderror))
}

#####
## Esta biblioteca simula a evolução dos preços seguindo
## um modelo GARCH(1,1) - N(0,1)
##
## O código inclui otimizações por vectorização sempre que for possível
#####
require(fOptions)

create_innovations <-
  function(paths,
           steps,
           antithetic = FALSE,
           lds = "",
           scrambling = 0) {
    # Parameters:
    # - paths: Number of paths (iterations)
    # - steps: number of time steps
    # - antithetic: flag, if true uses antithetic variates
    # - lds: controls the sampling scheme,
    # if empty uses pseudo-random numbers,
    # otherwise it will use HALTON or SOBOL LDS
    # - scrambling: scrambling scheme for the sobol LDS.
    # Valid options: 1, 2 or 3 the sequence is scrambled otherwise not.
    # If 1, Owen type type of scrambling is applied,
    # if 2, Faure-Tezuka type of scrambling, is applied, and

```

```
#   if 3, both Owen+Faure-Tezuka type of scrambling is applied.
#

if (missing(paths)) {
  stop("The number of paths (iterations) must be specified!")
}
if (missing(steps)) {
  stop("The number of time steps must be specified!")
}
if ((antithetic) && (paths %% 2 != 0)) {
  stop("The number of paths is not even!")
}

lds <- tolower(lds)

if (antithetic == TRUE) {
  if (lds == "halton") {
    # halton
    random_half_unif <-
      runif.halton(n = paths / 2, dimension = steps)
  } else if (lds == "sobol") {
    random_half_unif <- runif.sobol(n = paths / 2, dimension = steps,
                                   scrambling = scrambling)
  } else {
    # pseudo random numbers
    random_half_unif <-
      matrix(
        runif(steps * paths / 2, min = 0, max = 1),
        ncol = steps,
        nrow = paths / 2,
        byrow = TRUE
      )
  }
  random_half_unif <- remove_extremes(random_half_unif)
  innov <- qnorm(random_half_unif, mean = 0, sd = 1)
  innov <- rbind(innov, -1.0 * innov)
} else {
  if (lds == "halton") {
    # halton
    innov <- qnorm(remove_extremes(
      runif.halton(n = paths, dimension = steps)),
```

```

        mean = 0,
        sd = 1)
} else if (lds == "sobol") {
  innov <- qnorm(remove_extremes(
    runif.sobol(n = paths, dimension = steps,
               scrambling = scrambling)),
    mean = 0,
    sd = 1)
} else {
  # pseudo random numbers
  innov <- matrix(
    rnorm(steps * paths, mean = 0, sd = 1),
    ncol = steps,
    nrow = paths,
    byrow = TRUE
  )
}
}

return(innov)

}

remove_extremes <- function(x){

  # We need to do this since when performing scrambling
  # sometimes the function will generate numbers > 1
  # this is a bug in the algorithm!
  # This is such an example:
  # runif.sobol(n = 16384, dimension = 271, scrambling = 3)
  x[which(x>1)] <- x[which(x>1)] - 1

  # Remove values of zero and 1
  # they will result in -Inf and +Inf when performing the inversion
  x[which(x==0)] <- .Machine$double.eps
  x[which(x==1)] <- 1-.Machine$double.eps

  return(x)
}

```

```

simulate_prices_garch_stentoft2005_ds2001 <-
function(s0,
        rf,
        p,
        paths,
        steps,
        antithetic = FALSE,
        lds = NULL,
        scrambling = 0,
        ds = FALSE,
        alpha_nig,
        beta_nig,
        nig = FALSE,
        nig_reg_coef,
        nig_reg_ln_coef) {

# Parameters:
# - s0: sptop price of the underline asset at time=0
# - rf: the risk-free rate
# - p: a list with GARCH Parameters
# - paths: Number of paths (iterations)
# - steps: number of time steps
# - antithetic: flag, if true uses antithetic variates
# - lds: controls the sampling scheme,
# if empty uses pseudo-random numbers,
# otherwise it will use HALTON or SOBOL LDS
# - ds: flag, if true uses the
#     empirical martingale method simulation (EMS) method
#     of Duan and Simonato (1998)
#
# GARCH process in a risk-neutral space used by:
#
# Stentoft, L., 2005. Pricing American options when the underlying
# asset follows GARCH processes.
# Journal of Empirical Finance, 12(4), pp.576611.
#
# to replicate the results of Duan and Simonato (2001):
# Duan, JC, and Jean-Guy Simonato. 2001. American Option Pricing
# Under GARCH by a Markov Chain Approximation.
# Journal of Economic Dynamics and Control 25: 16891718.

```

```

if (missing(s0)) {
  stop("The spot price at time 0 must be specified!")
}
if (missing(rf)) {
  stop("The risk-free rate must be specified!")
}
if (missing(p)) {
  stop("The GARCH parameters must be specified!")
}
if (missing(paths)) {
  stop("The number of paths (iterations) must be specified!")
}
if (missing(steps)) {
  stop("The number of time steps must be specified!")
}
if (nig==TRUE & (missing(alpha_nig) || missing(beta_nig) ||
  missing(nig_reg_coef) || missing(nig_reg_ln_coef))){
  stop("The NIG coefficients must be specified!")
}

prices <- matrix(0, nrow = paths, ncol = steps)
cond_vol <- matrix(0, nrow = paths, ncol = steps)
e_t <- rep(0, paths)

# The daily continuous risk-free rate
# We assume 365 days a year, as in Stentoft(2005)
# and (Duan and Simonato 2001)
rf <- log(1 + rf/360)

# Create the innovations
# The function generates steps + 1 columns of innovations
# the extra one is used for the first e_tm1 term in the GARCH process
innov <- create_innovations(
  paths = paths,
  steps = steps + 1,
  antithetic = antithetic,
  lds = lds,
  scrambling = scrambling
)

if (nig == TRUE){

```

```

# use the approximations to obtain the Normal Inverse Gaussian
# distribution using the approximations proposed by
# Stentoft (2008)
innov <- nig_reg_coef[1] +
          nig_reg_coef[2]*innov +
          nig_reg_coef[3]*innov^2 +
          nig_reg_coef[4]*innov^3 +
          nig_reg_coef[5]*innov^4 +
          nig_reg_coef[6]*innov^5
}

# The starting conditional volatility of the process
h_0 <- p$omega / (1 - p$alpha*(1+p$gamma^2) - p$beta)

e_t <- innov[, 1] * sqrt(h_0)
cond_vol[, 1] <- p$omega +
  p$alpha * (e_t + p$gamma * sqrt(h_0))^2 +
  p$beta * h_0
e_t <- innov[, 2] * sqrt(cond_vol[, 1])
if (nig == TRUE){
  approximation <- nig_reg_ln_coef[1] +
                    nig_reg_ln_coef[2]*cond_vol[,1] +
                    nig_reg_ln_coef[3]*cond_vol[,1]^2 +
                    nig_reg_ln_coef[4]*cond_vol[,1]^3 +
                    nig_reg_ln_coef[5]*cond_vol[,1]^4 +
                    nig_reg_ln_coef[6]*cond_vol[,1]^5
  prices[, 1] <- s0 * exp(rf - approximation + e_t)
} else{
  prices[, 1] <- s0 * exp(rf + p$lambda * sqrt(cond_vol[, 1]) -
                        0.5 * cond_vol[, 1] + e_t)
}

if (ds == TRUE){
  # EMS - Duan e Simonato (1998) Eq. 9-11
  s_star <- matrix(0, nrow = paths, ncol = steps)
  z <- matrix(0, nrow = paths, ncol = steps)

  z[, 1] <- s0 * (prices[, 1] / s0)
  z0 <- (1 / paths) * exp(-rf) * sum(z[, 1])
  s_star[, 1] <- s0 * (z[, 1] / z0)
}

```



```

for (i in 2:steps) {
  cond_vol[, i] <- p$omega +
    p$alpha * (e_t + p$gamma * sqrt(cond_vol[, i - 1]))^2 +
    p$beta * cond_vol[, i - 1]

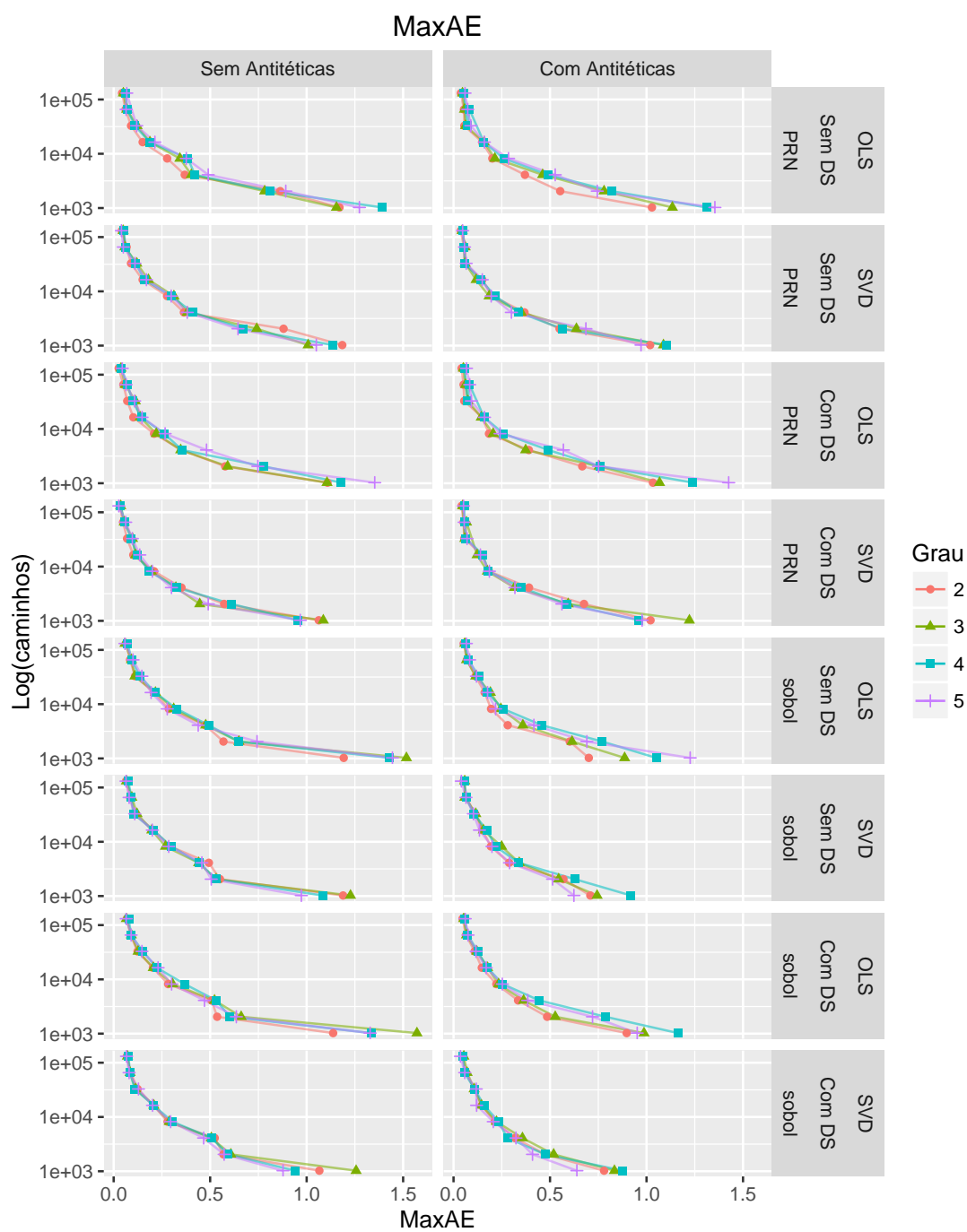
  e_t <- innov[, i + 1] * sqrt(cond_vol[, i])
  if (nig == TRUE){
    approximation <- nig_reg_ln_coef[1] +
      nig_reg_ln_coef[2]*cond_vol[,i] +
      nig_reg_ln_coef[3]*cond_vol[,i]^2 +
      nig_reg_ln_coef[4]*cond_vol[,i]^3 +
      nig_reg_ln_coef[5]*cond_vol[,i]^4 +
      nig_reg_ln_coef[6]*cond_vol[,i]^5
    prices[, i] <-
      prices[, i - 1] * exp(rf - approximation + e_t)
  } else {
    prices[, i] <-
      prices[, i - 1] * exp(rf + p$lambda * sqrt(cond_vol[, i]) -
        0.5 * cond_vol[, i] + e_t)
  }
  if (ds == TRUE){
    # EMS - Duan e Simonato (1998) Eq. 9-11
    z[, i] <- s_star[, i - 1] * (prices[, i] / prices[, i - 1])
    z0 <- (1 / paths) * exp(-rf) * sum(z[, i])
    s_star[, i] <- s0 * (z[, i] / z0) * exp(rf * (i - 1))
  }
}

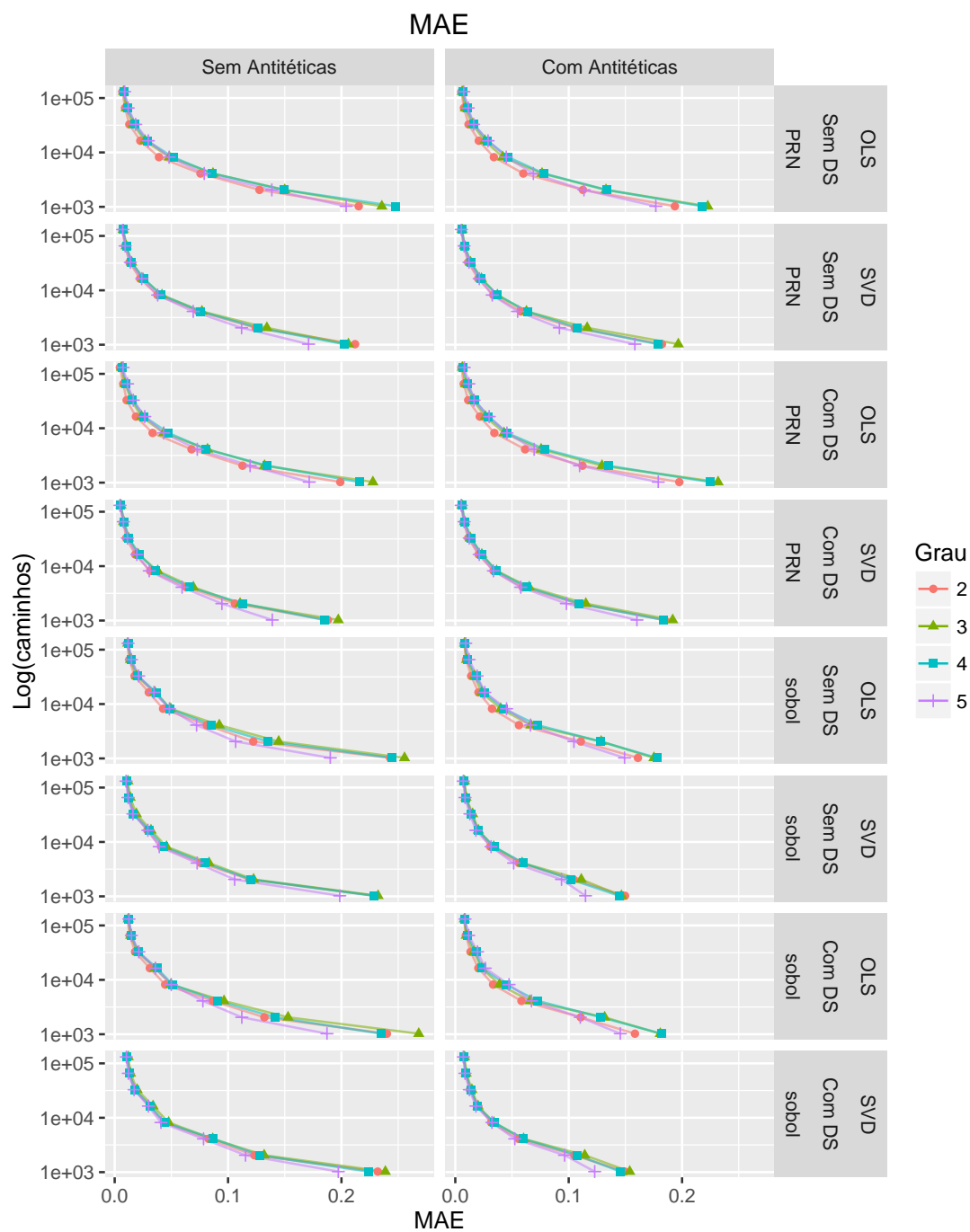
if (ds == TRUE){
  # EMS - Duan e Simonato (1998) Eq. 9-11
  prices <- s_star
}

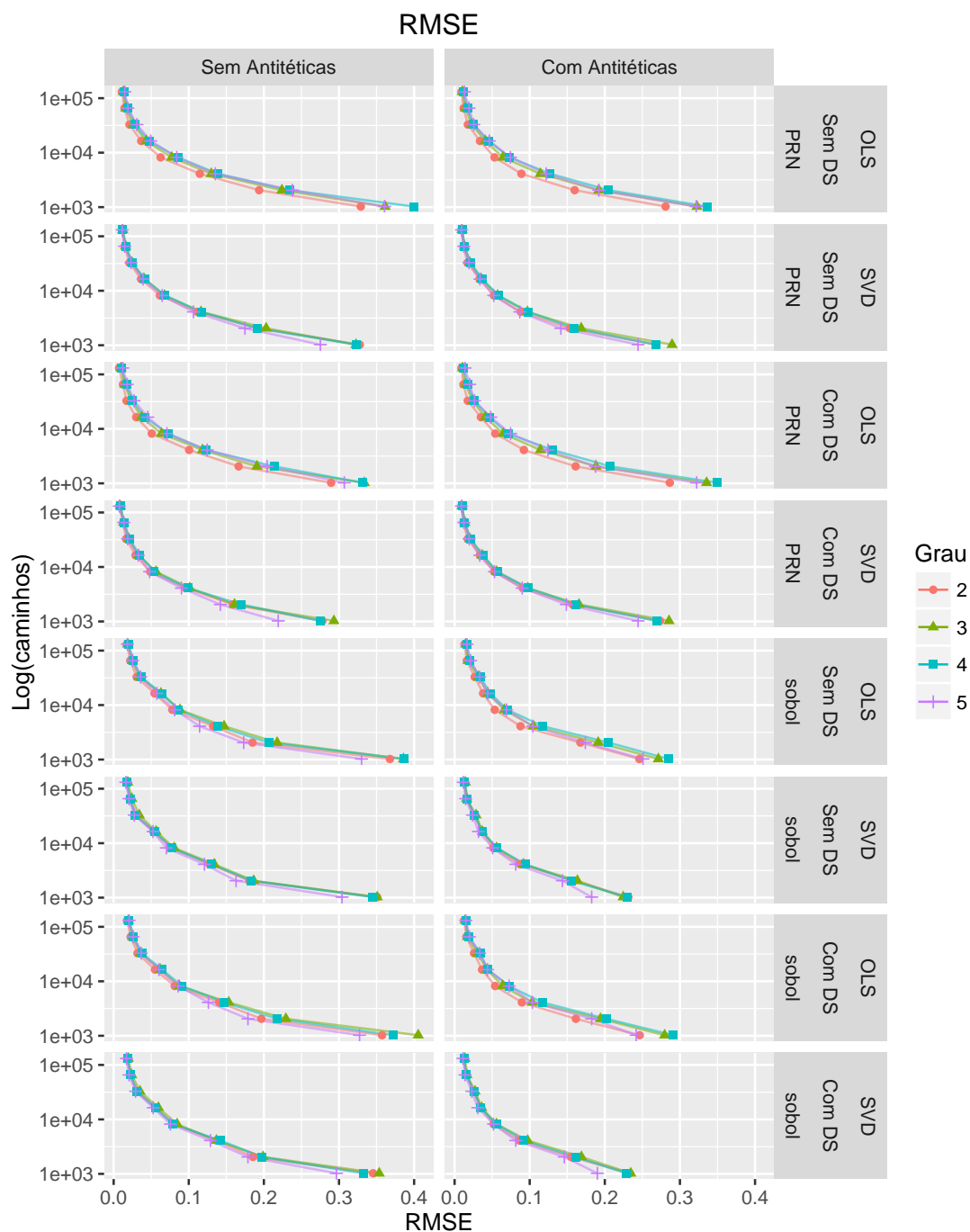
return(list(prices = prices, cond_vol = sqrt(cond_vol)))
}

```

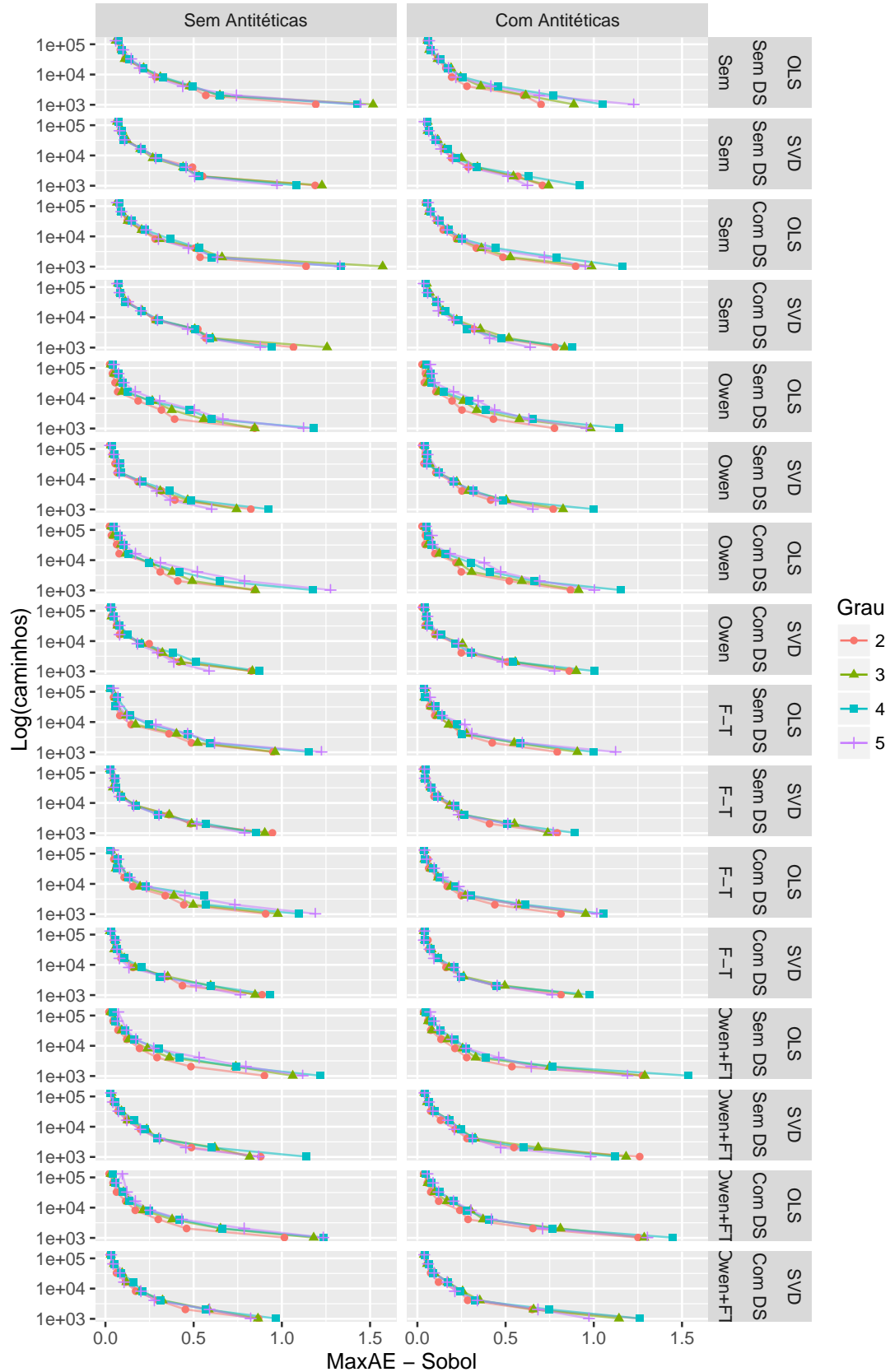
B.2 Gráficos

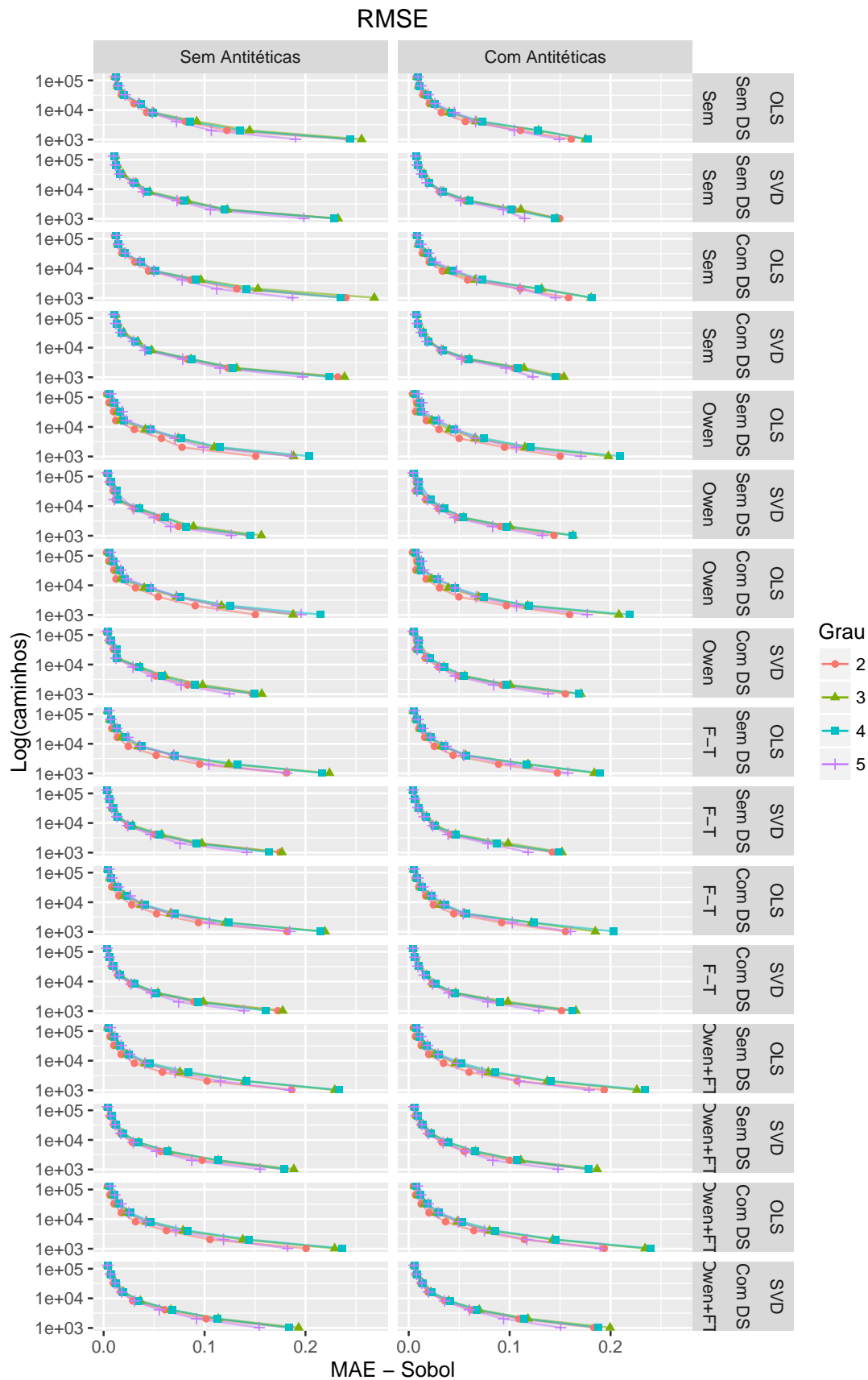


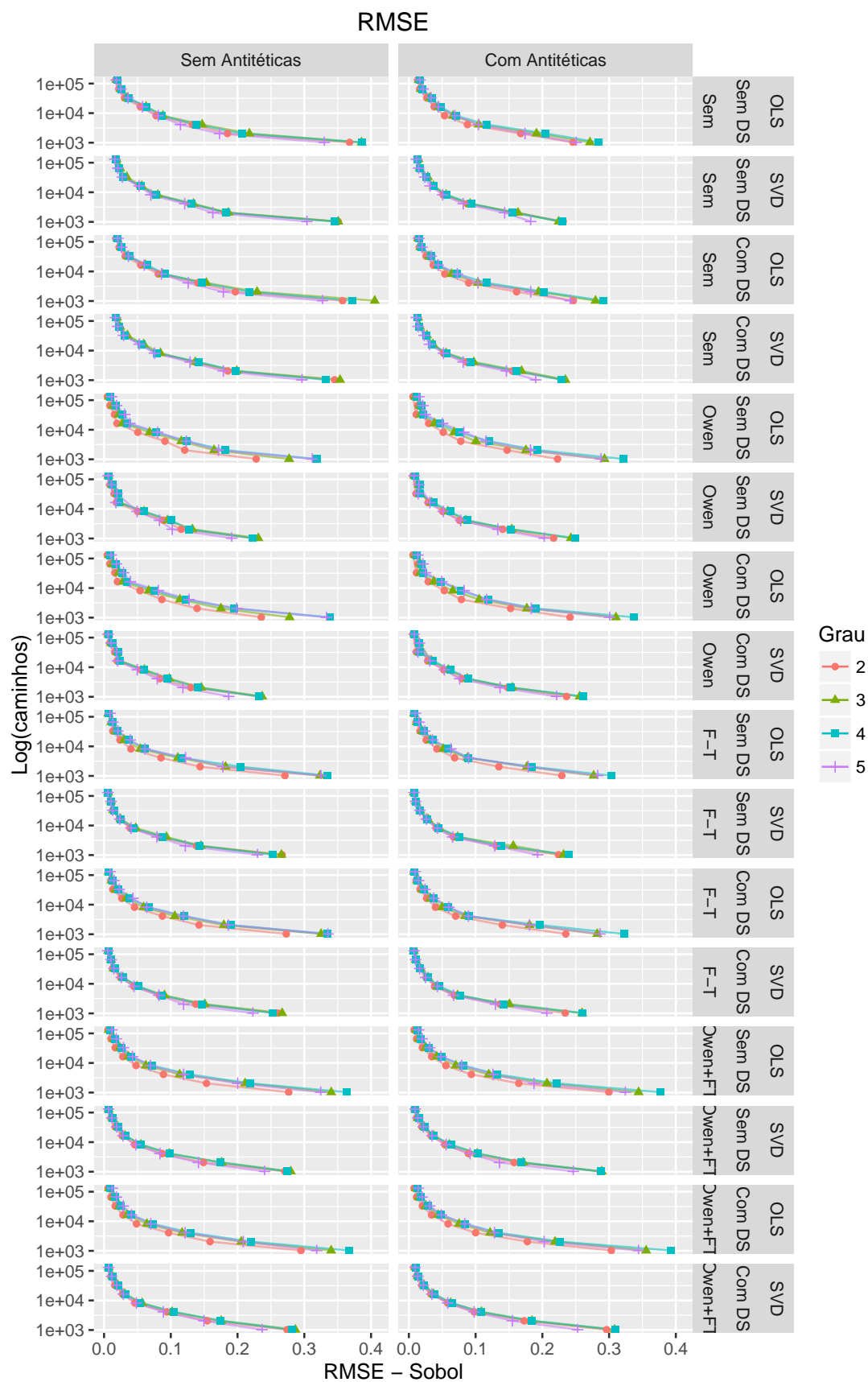


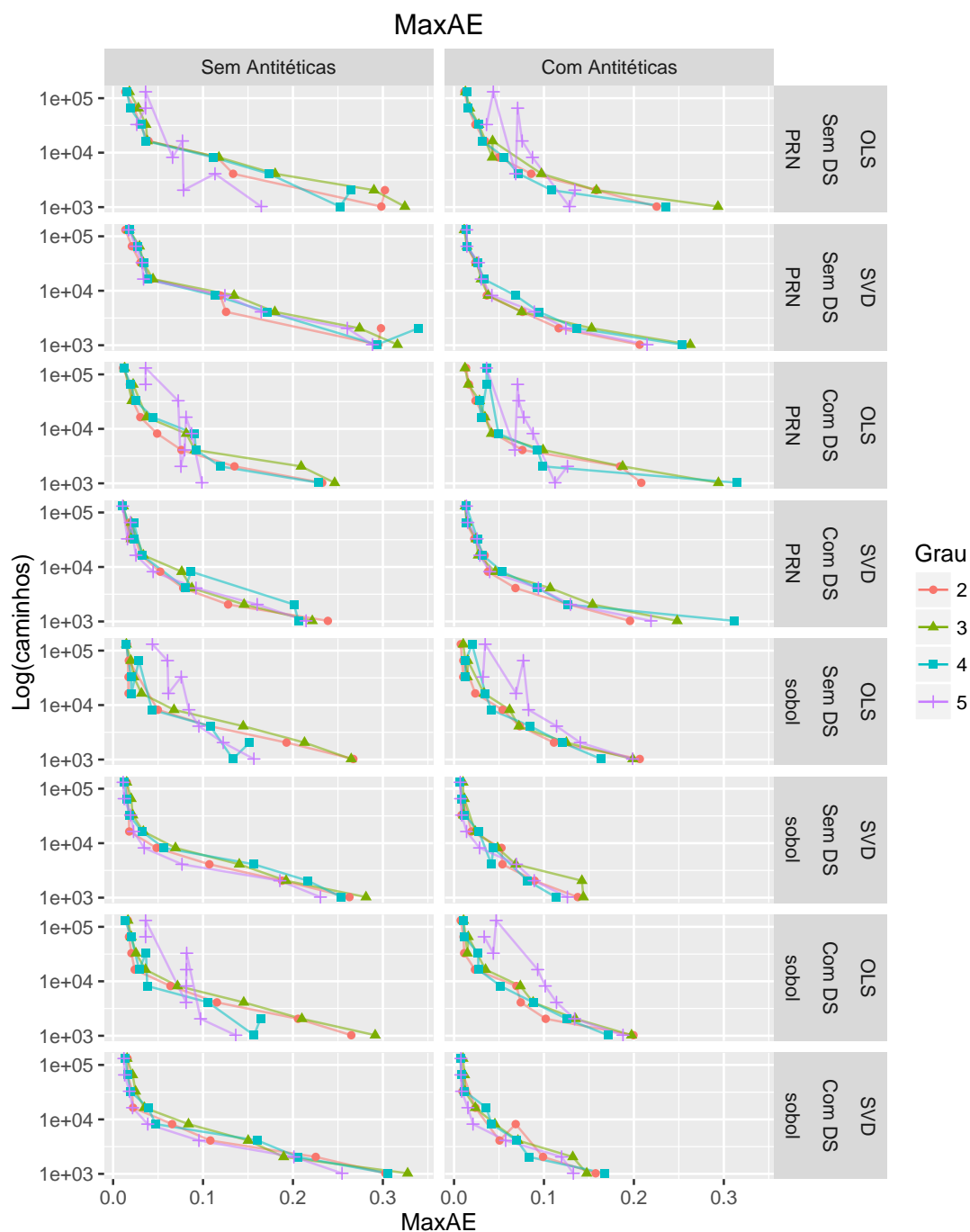


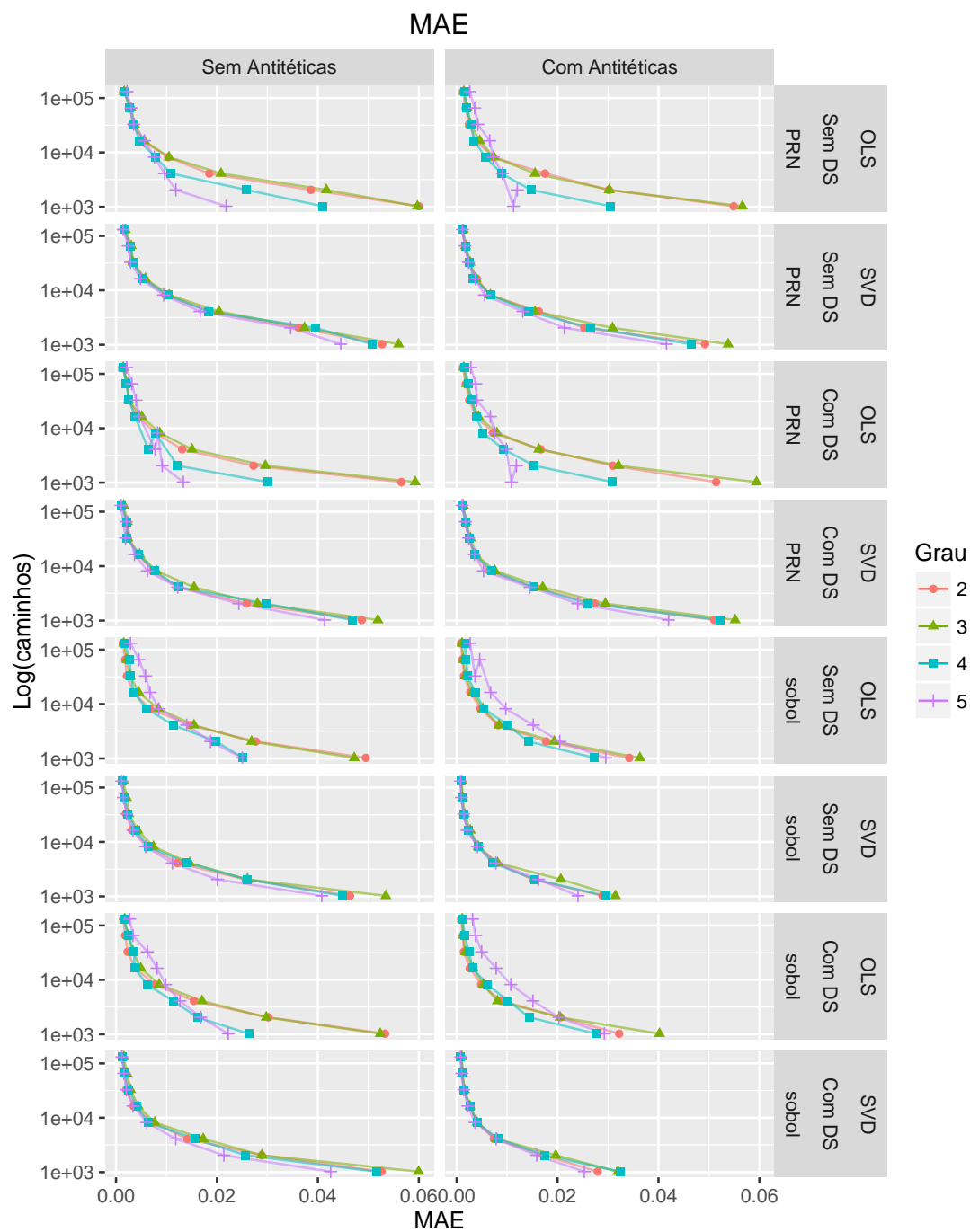
RMSE

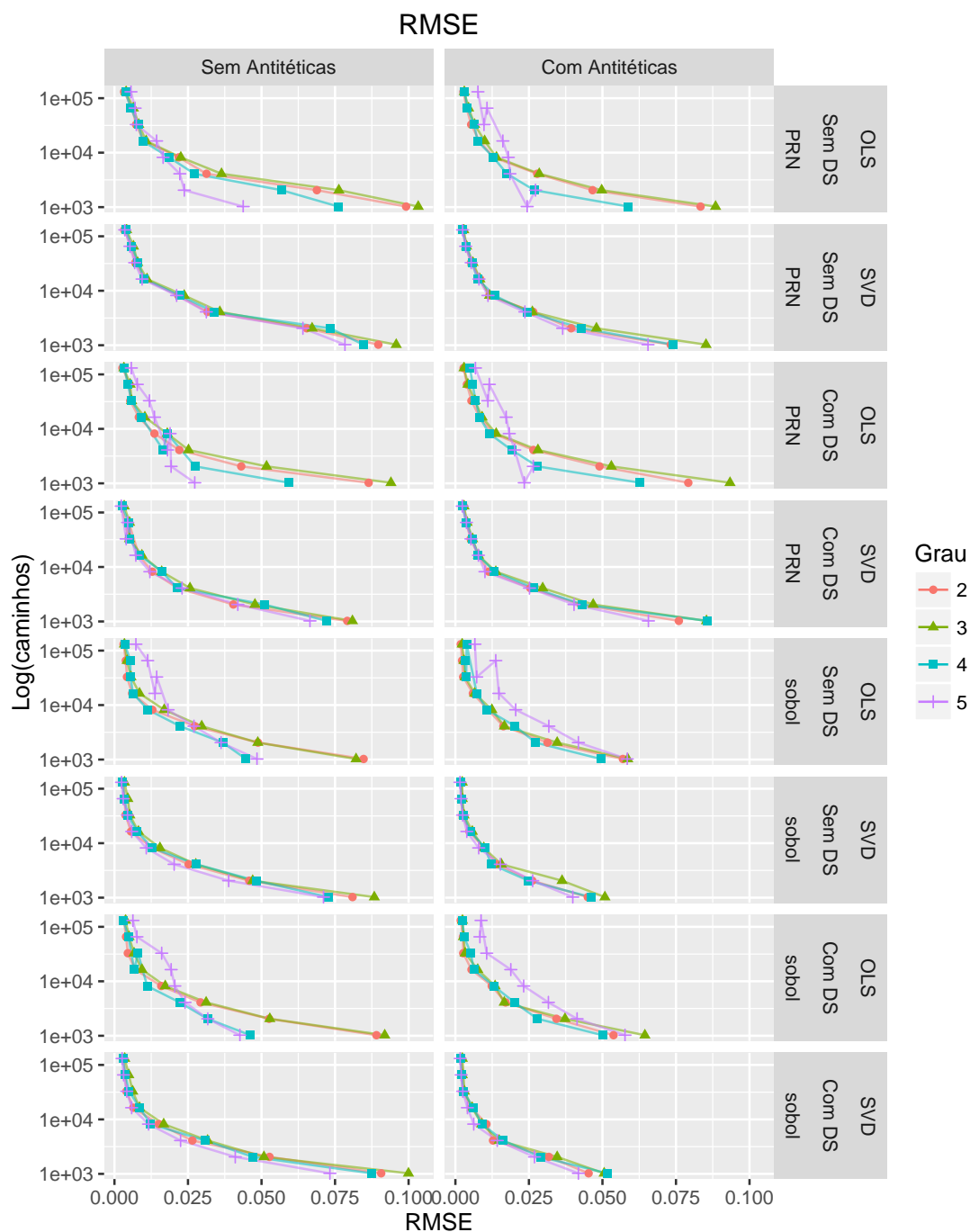


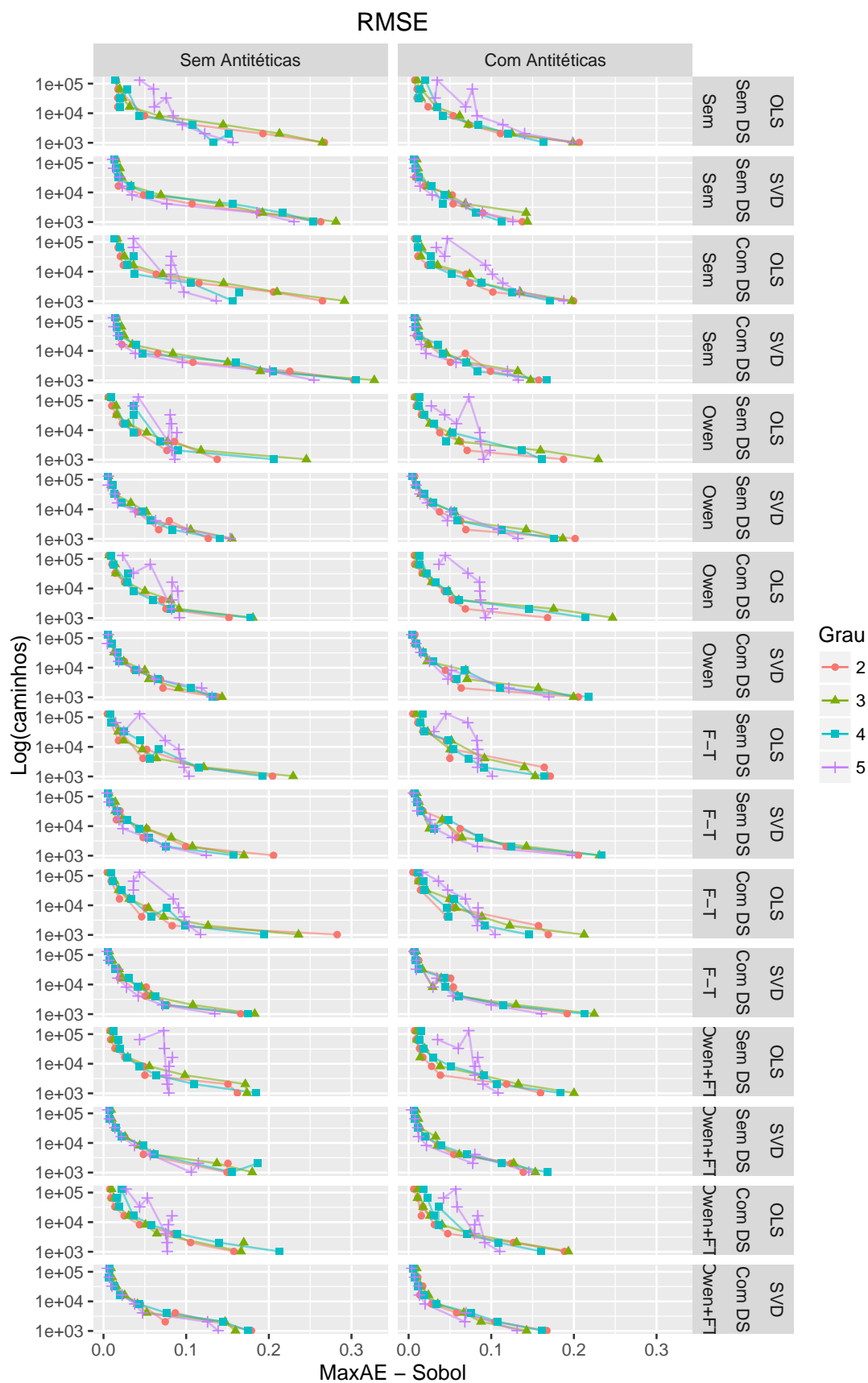


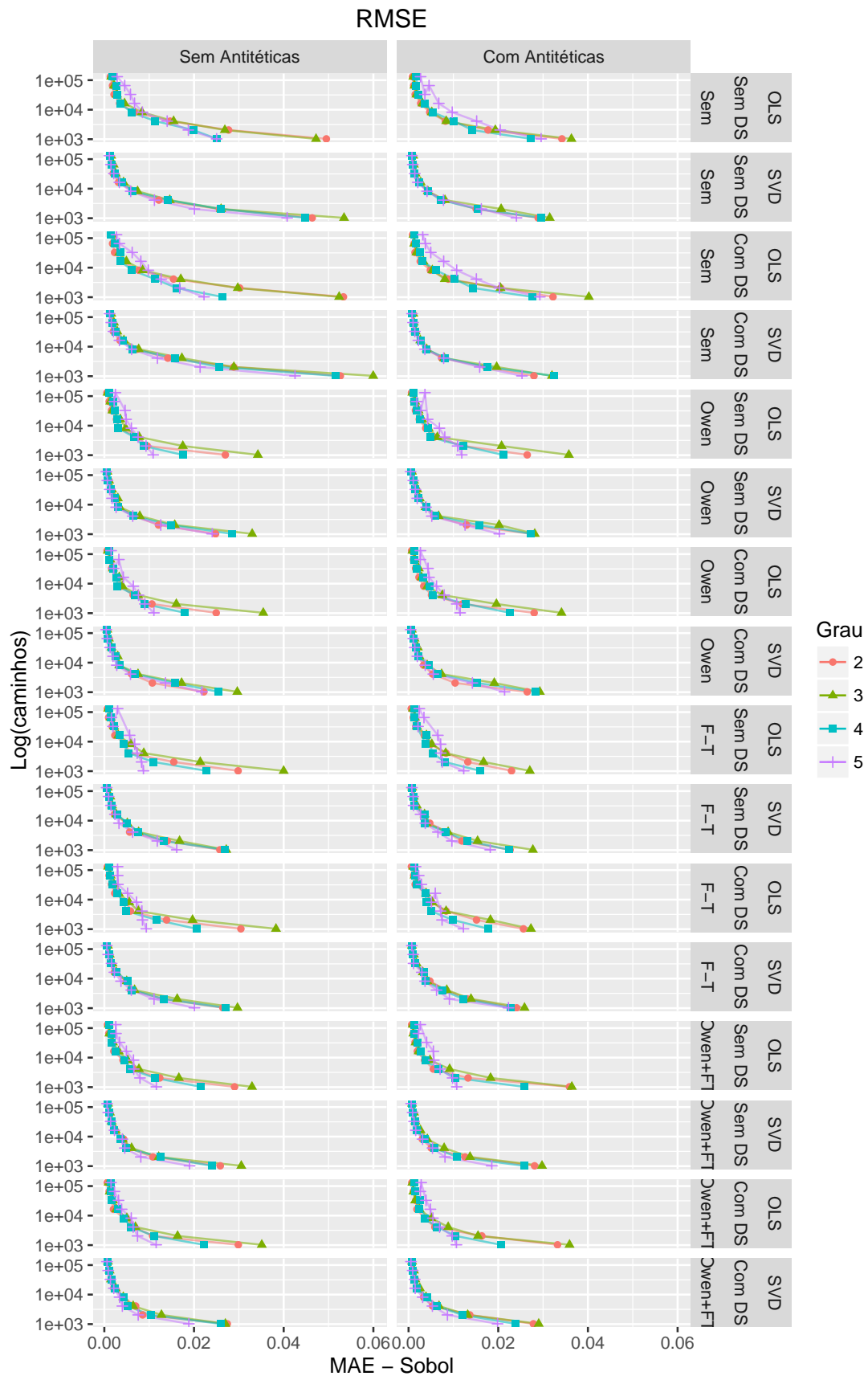


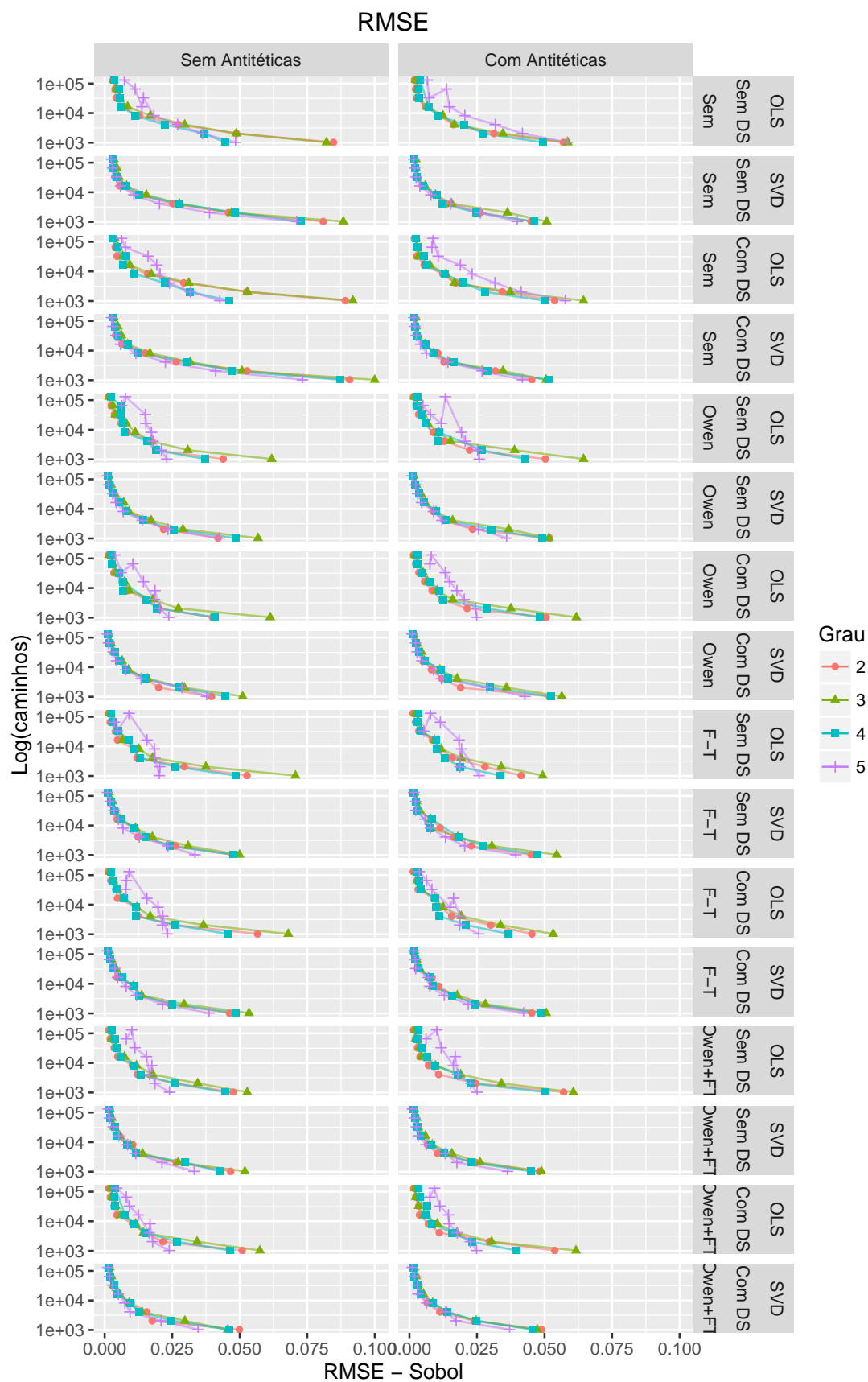


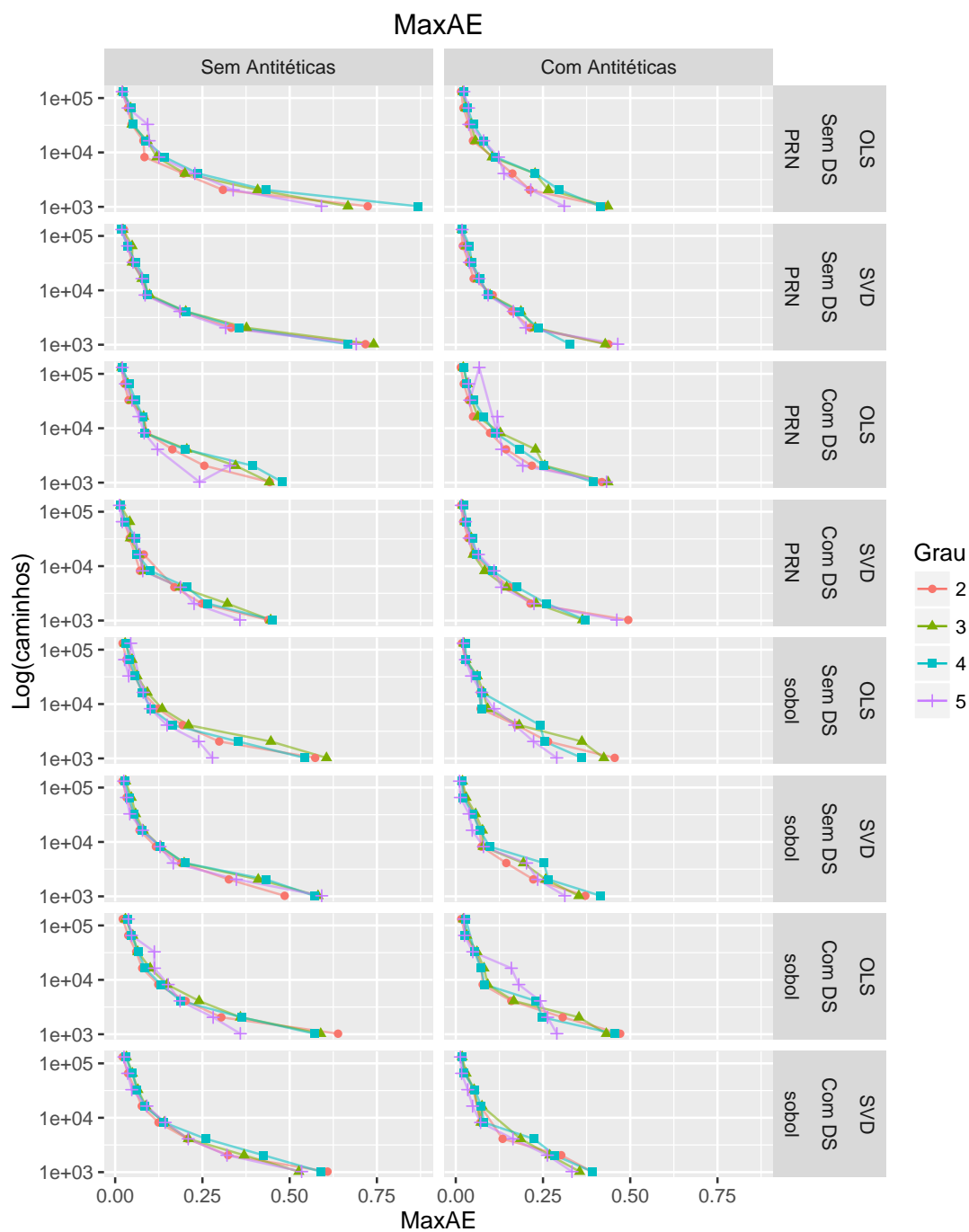


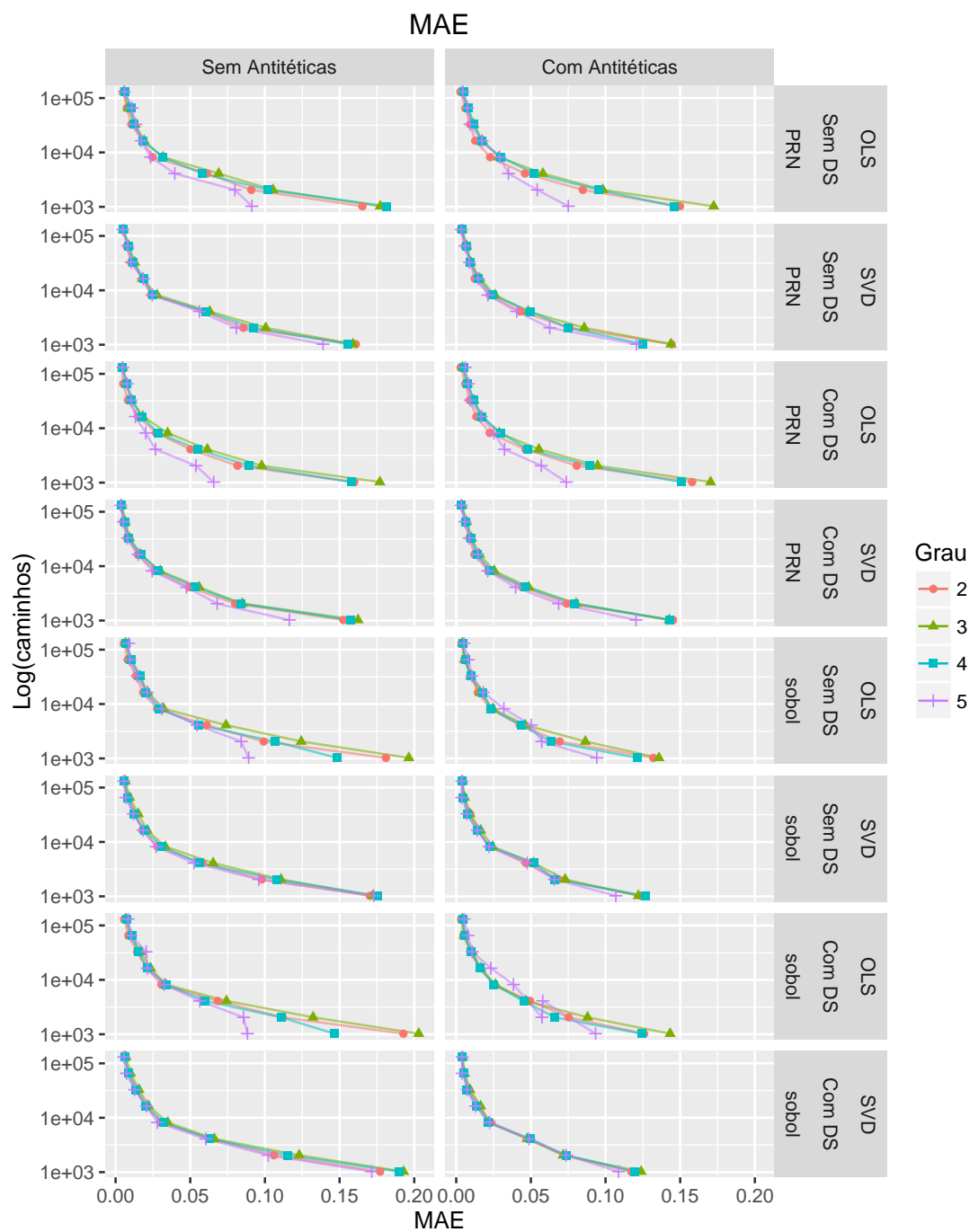


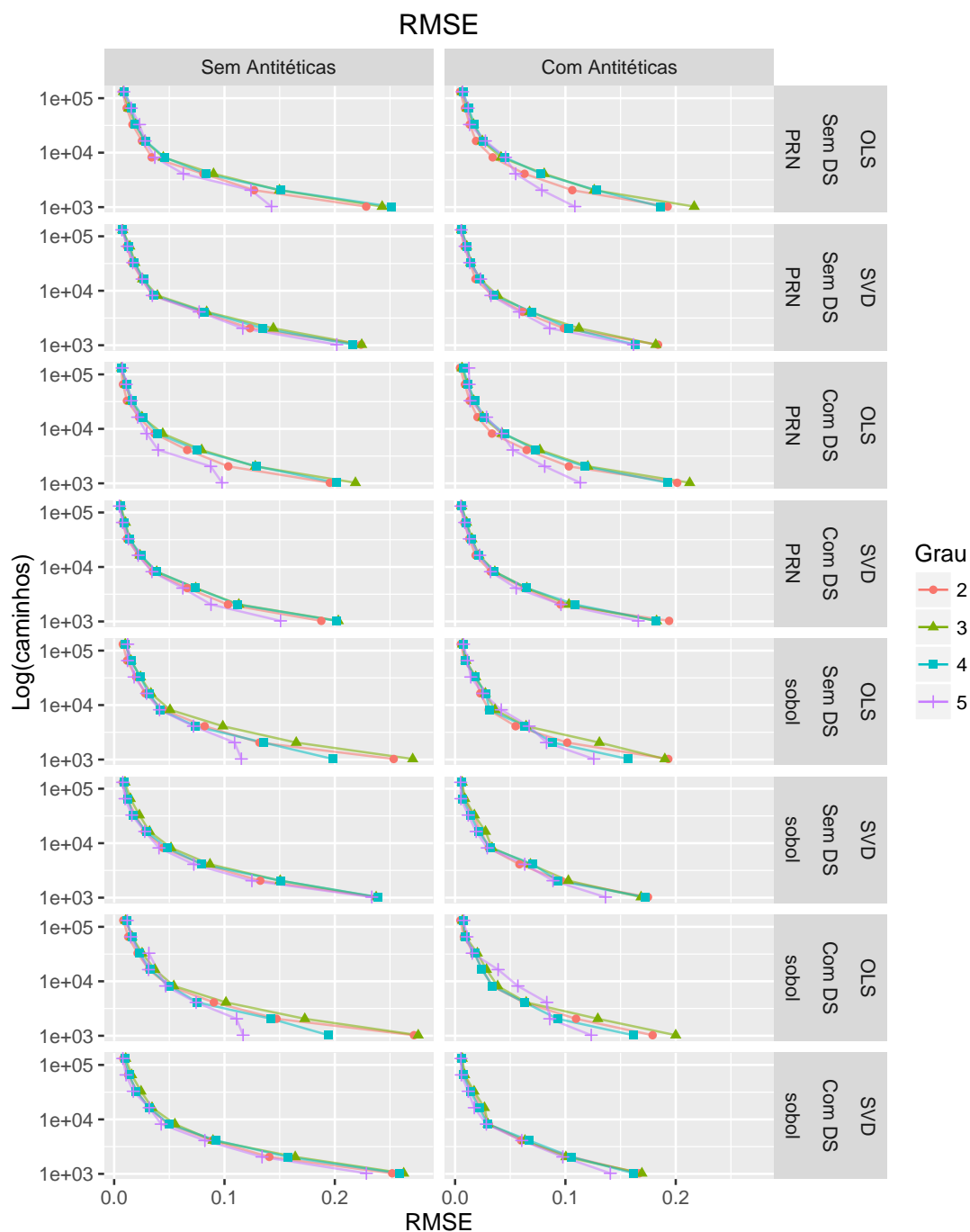


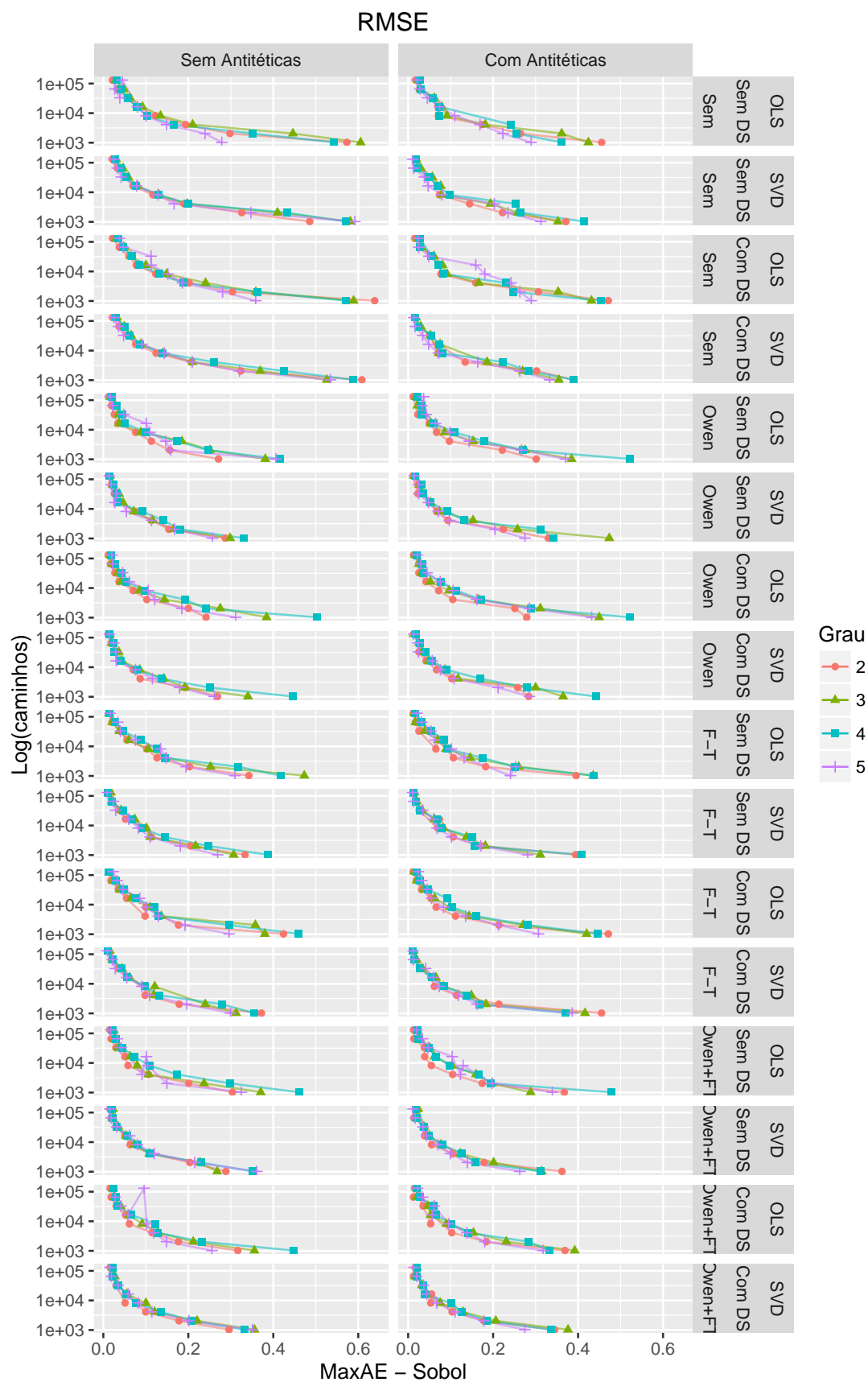


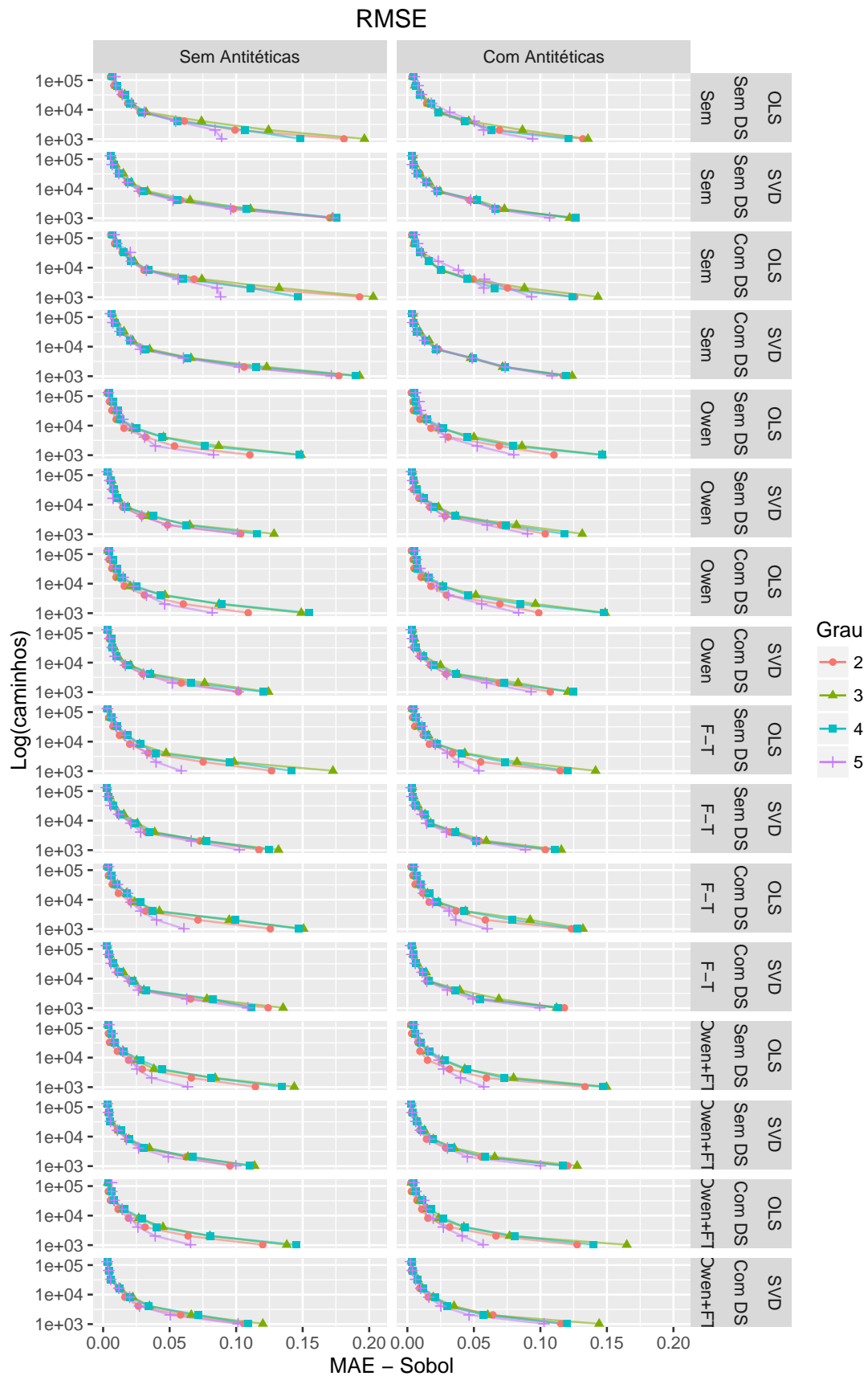


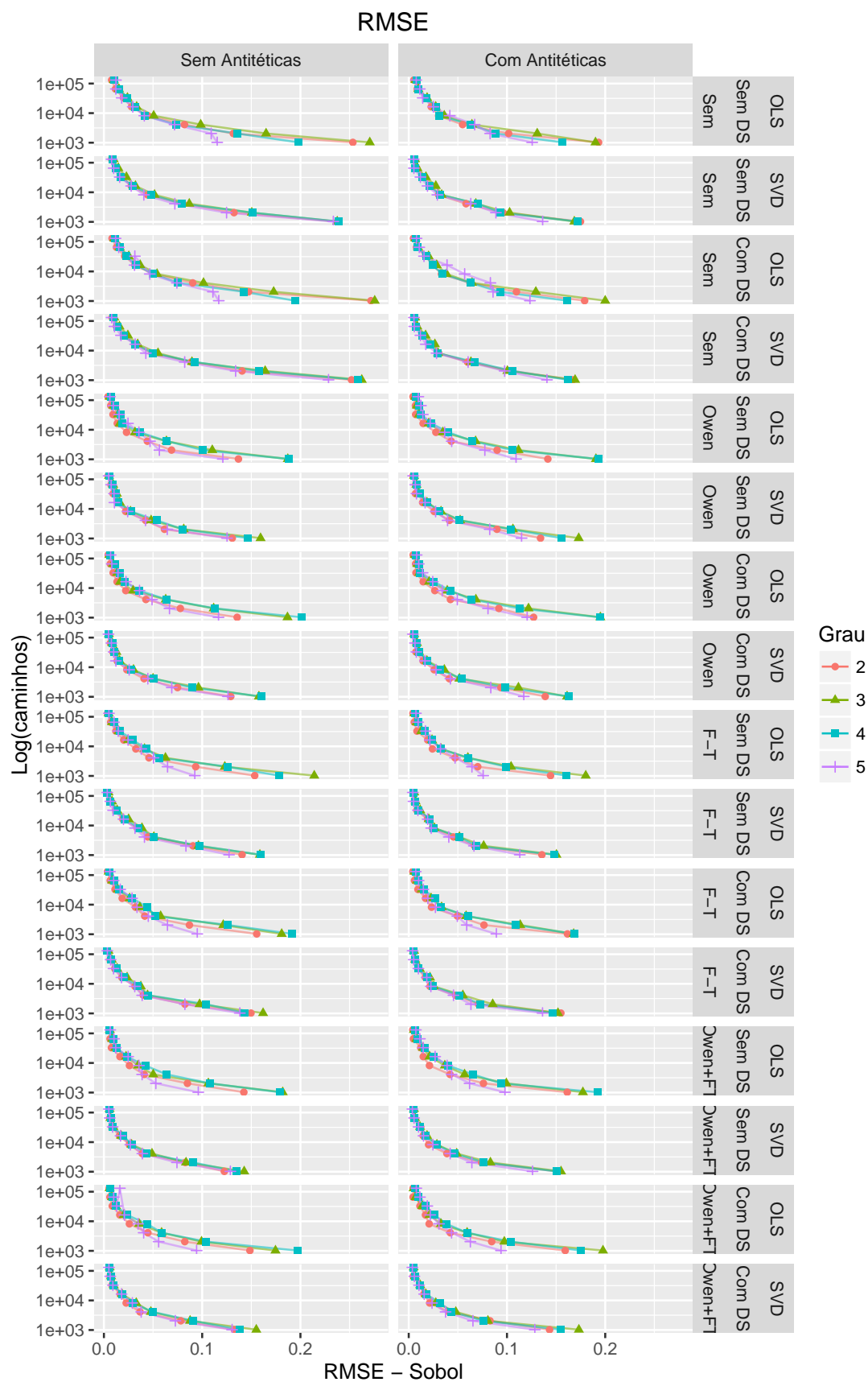


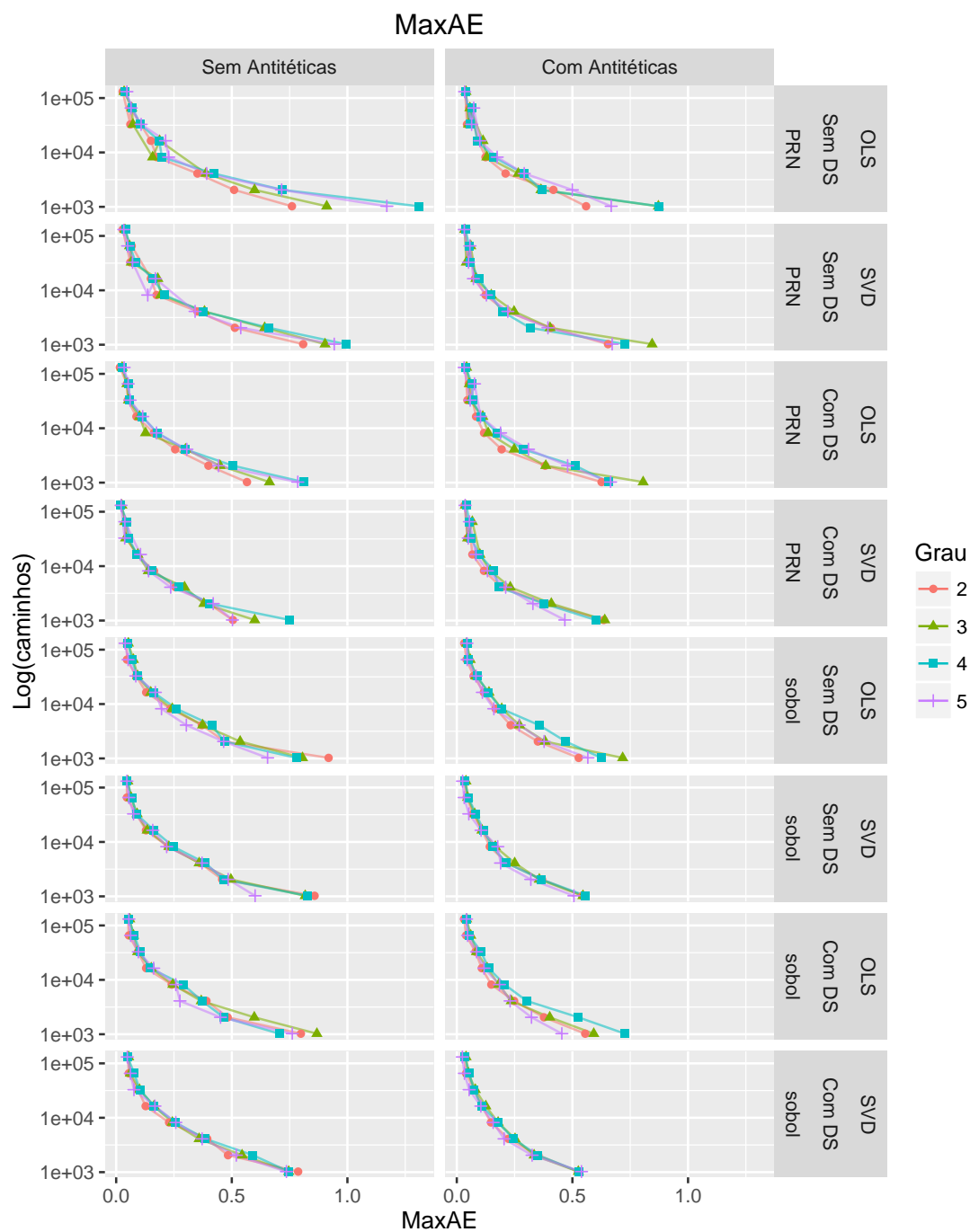


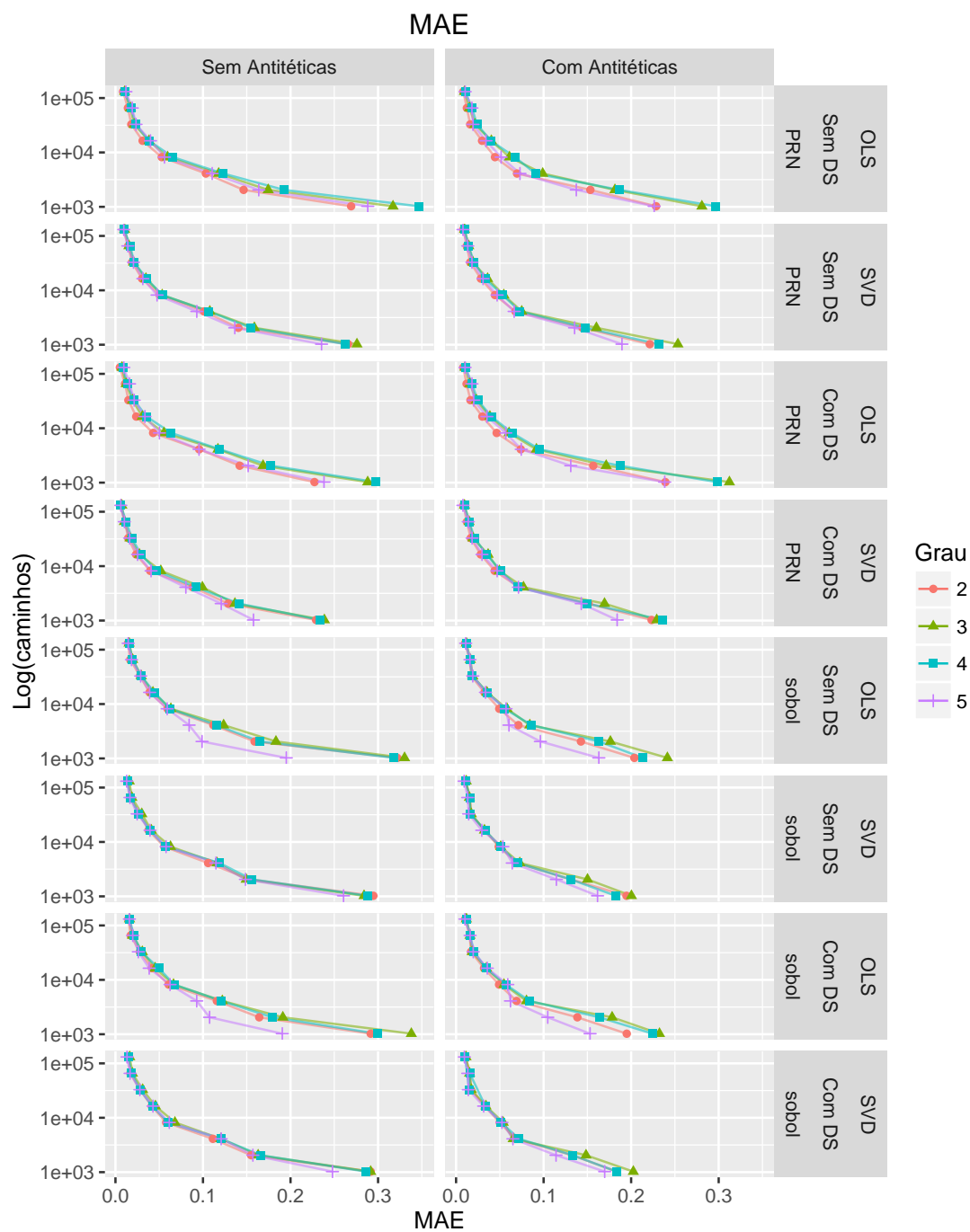


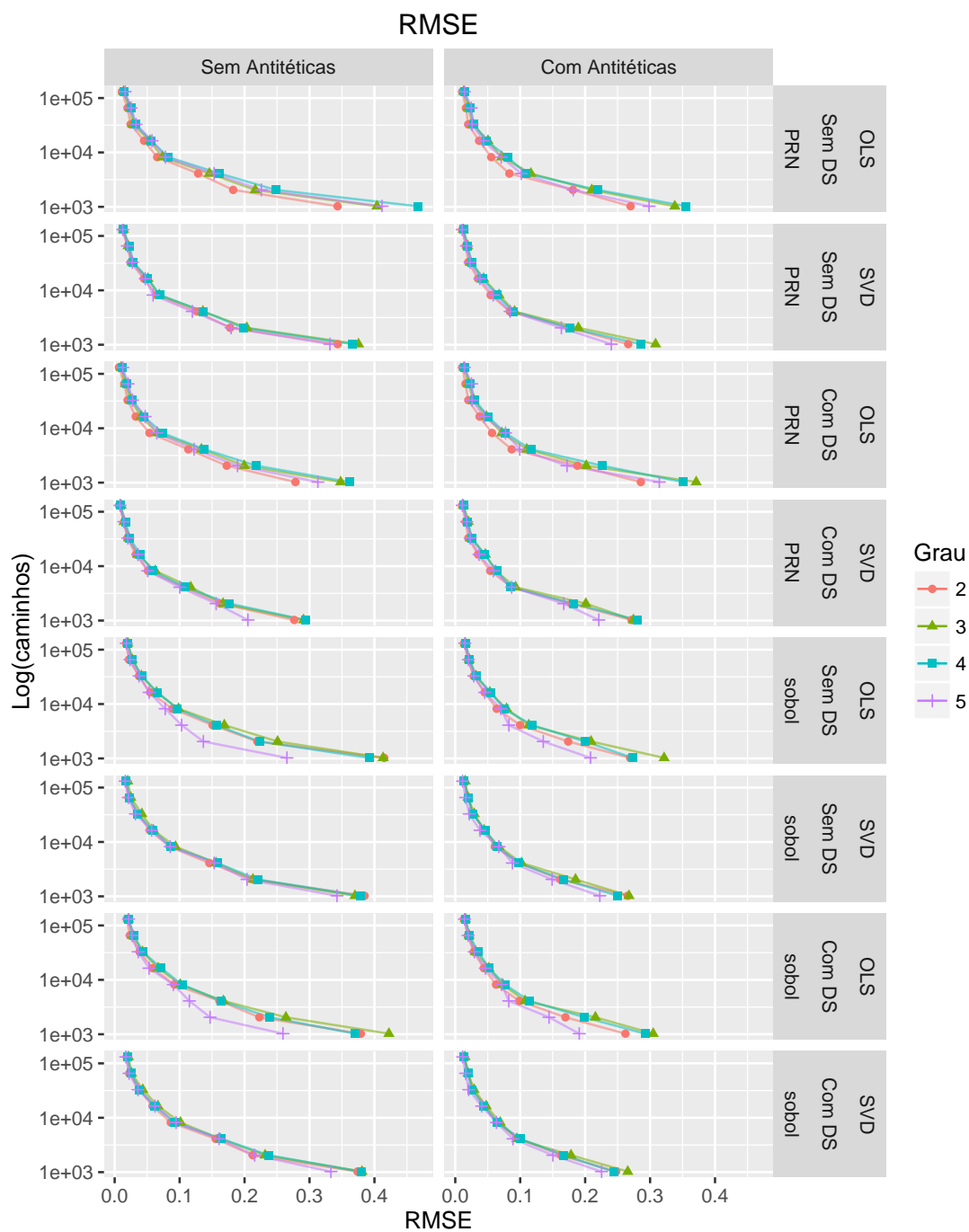


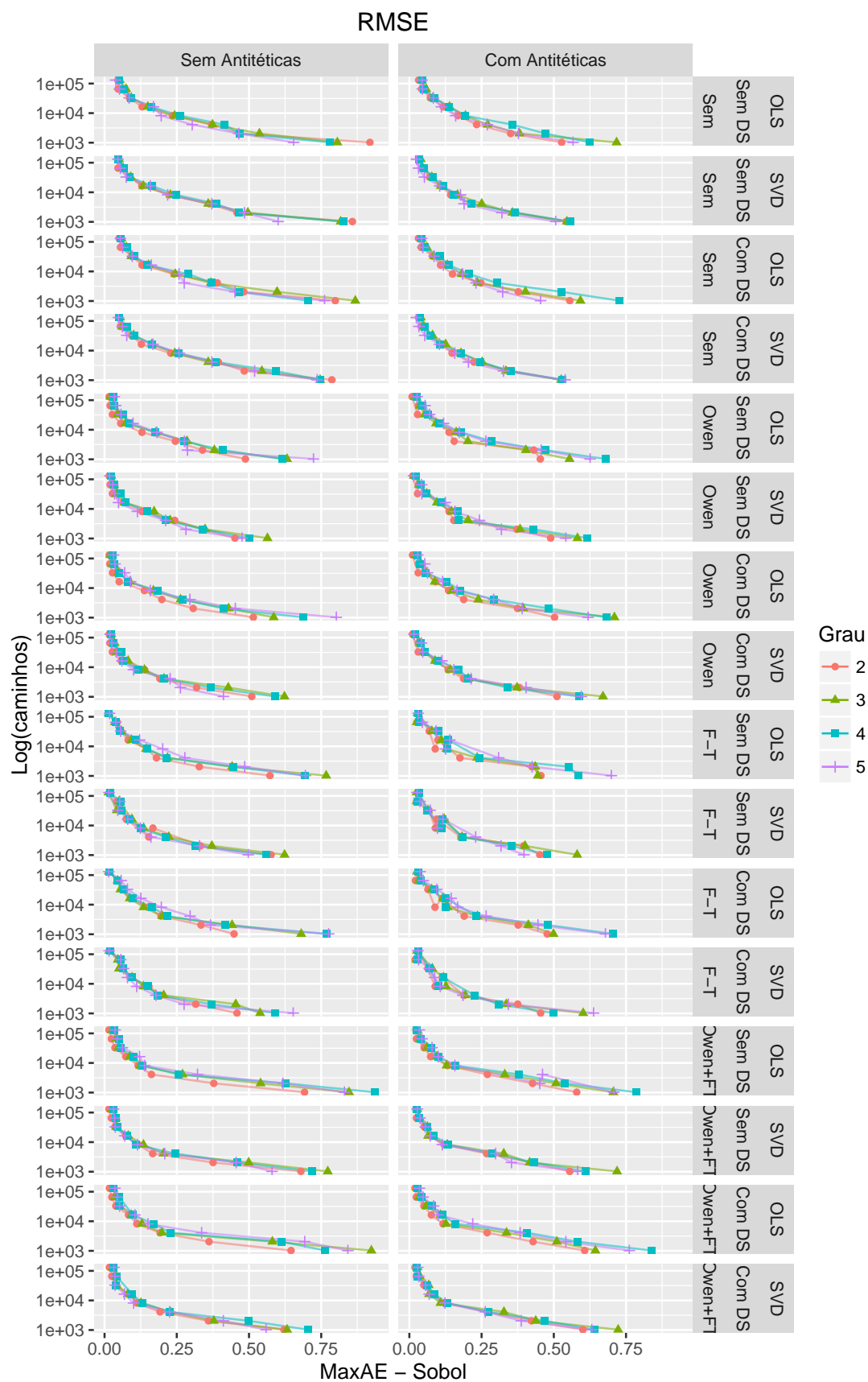


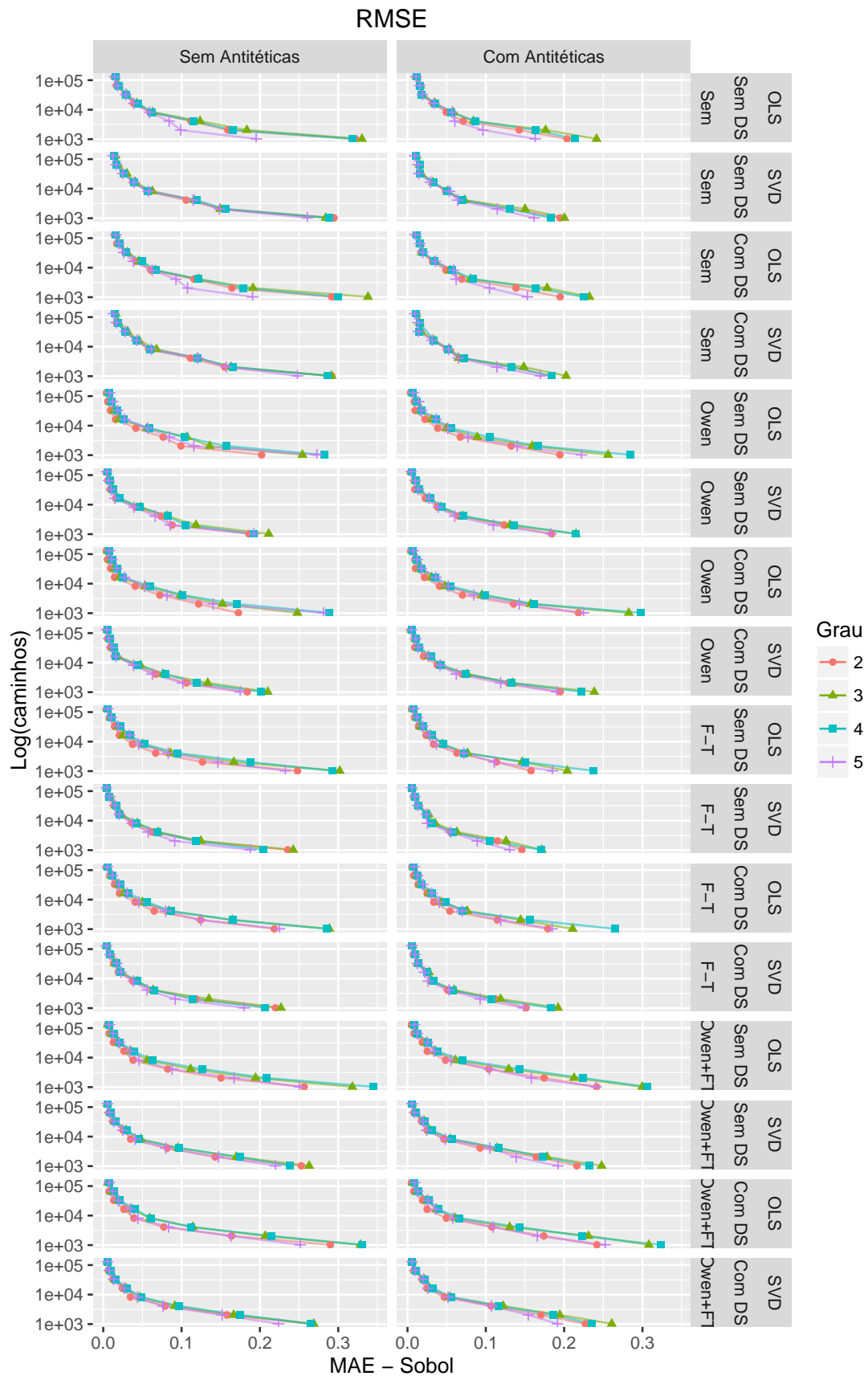


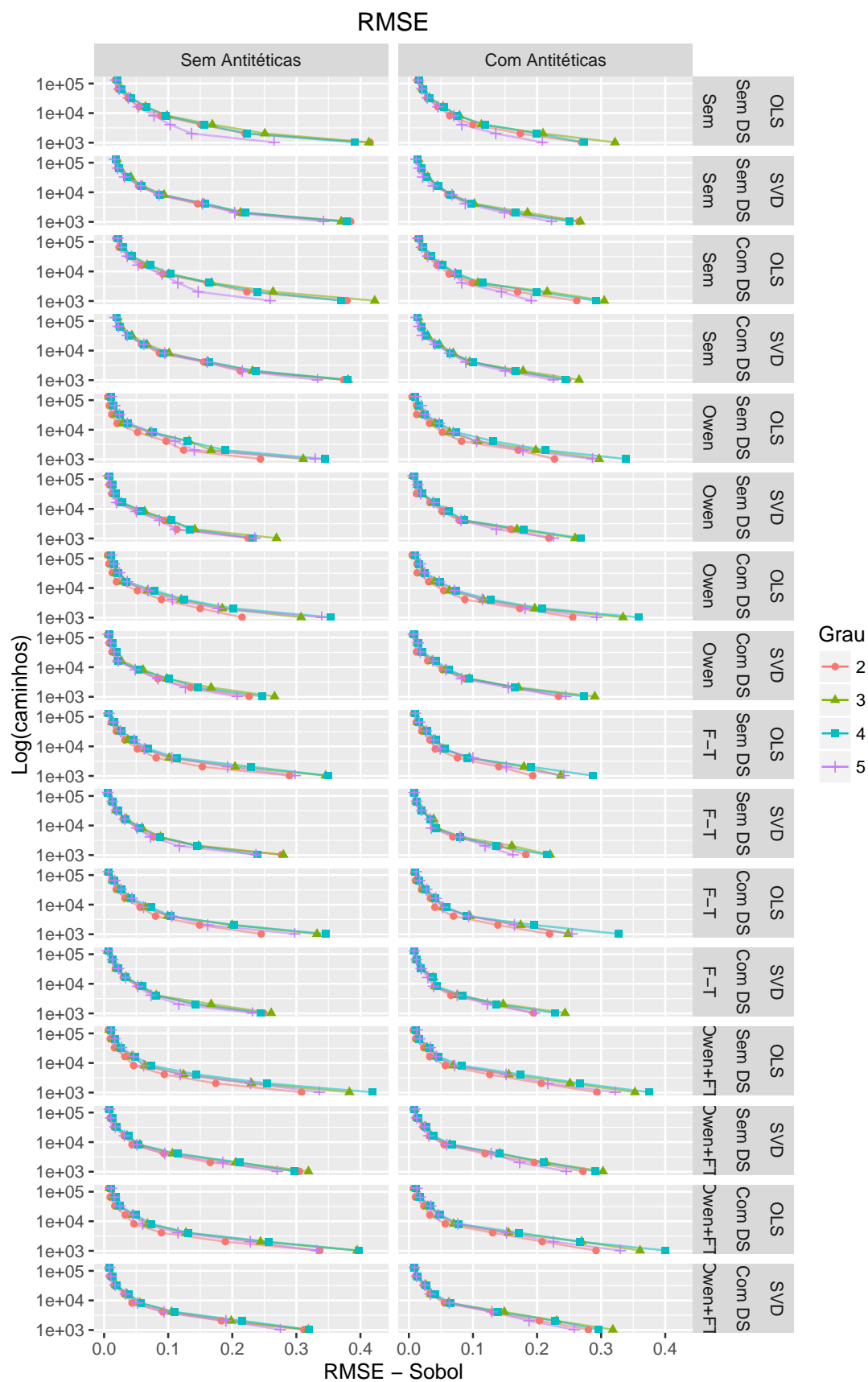


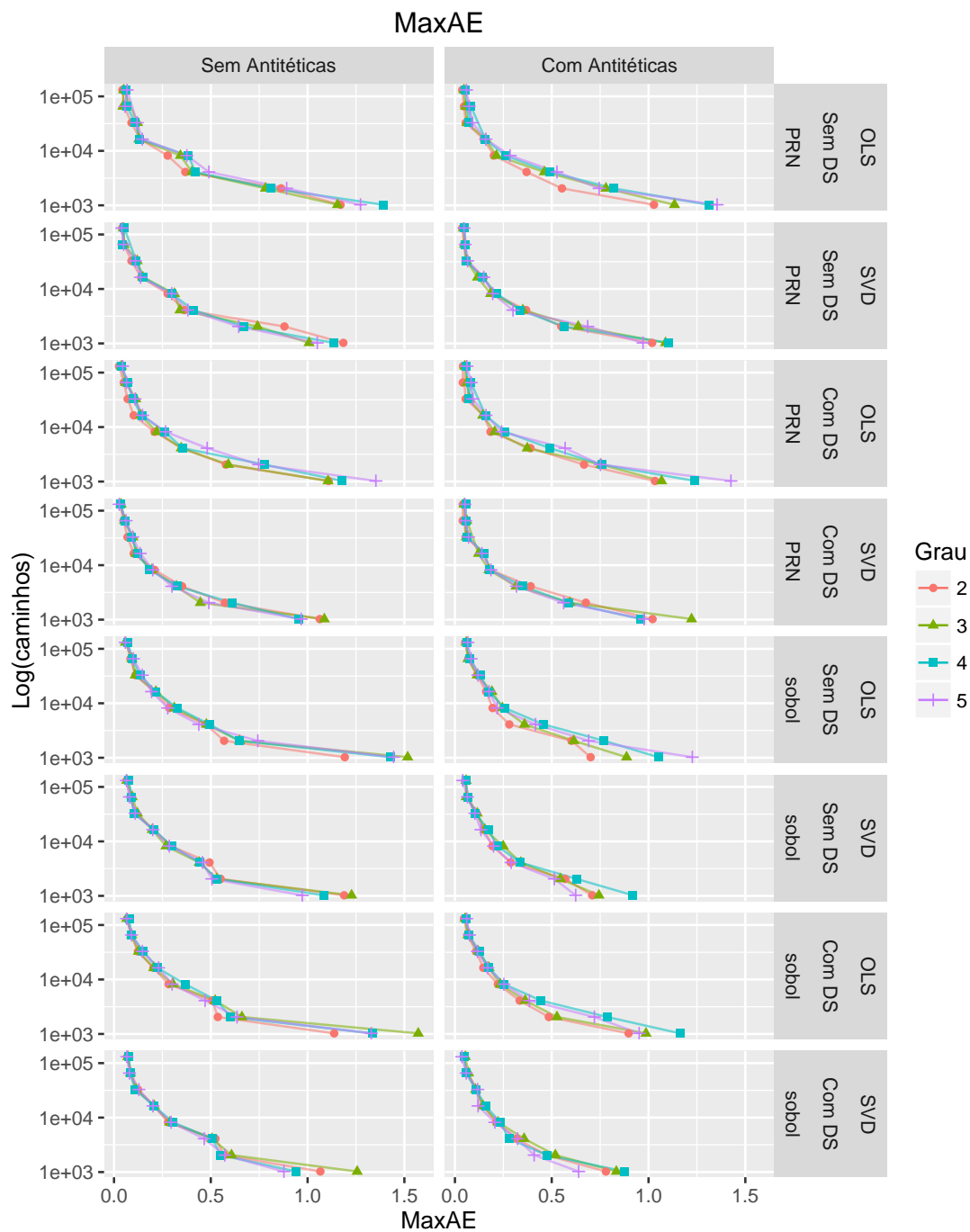


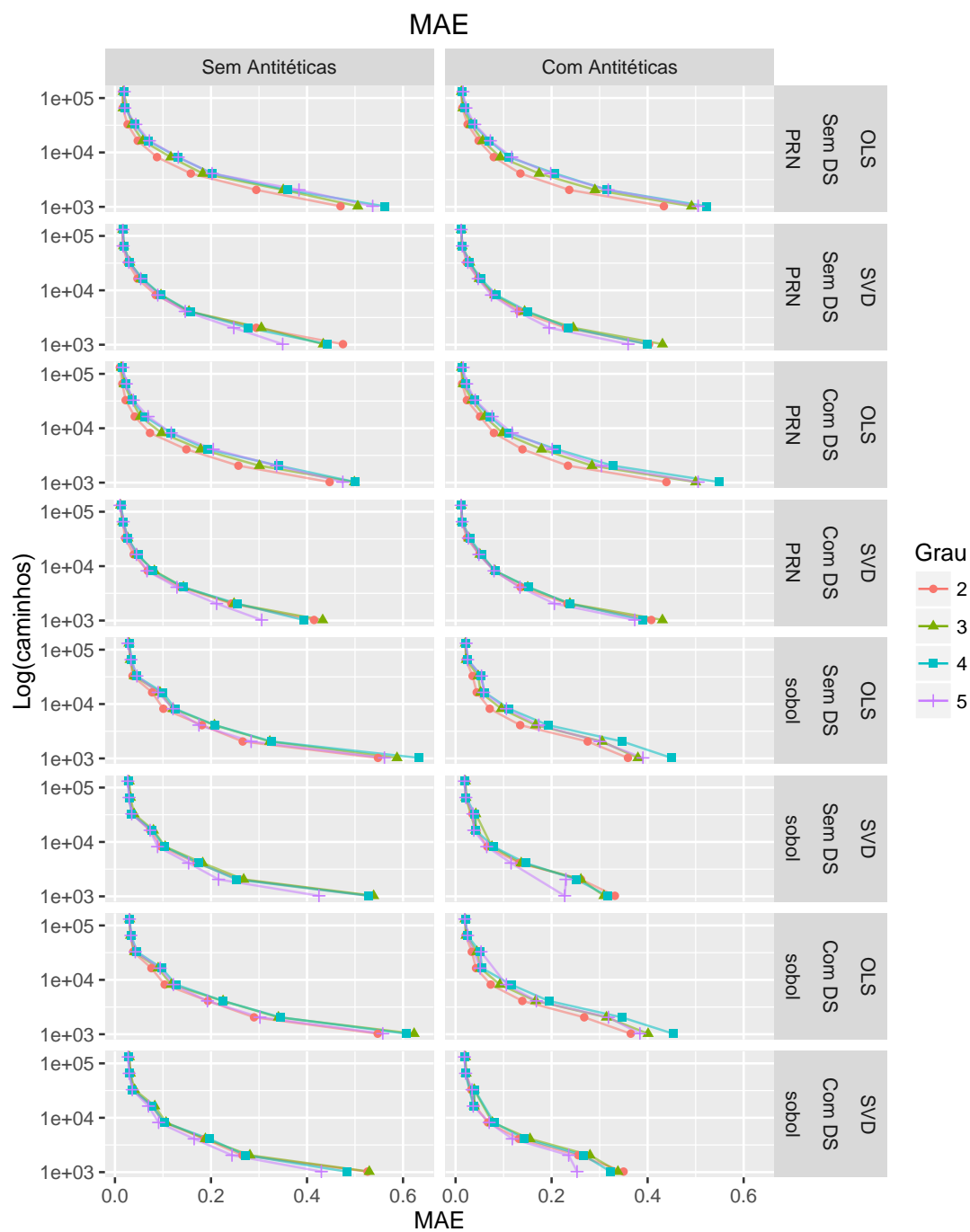


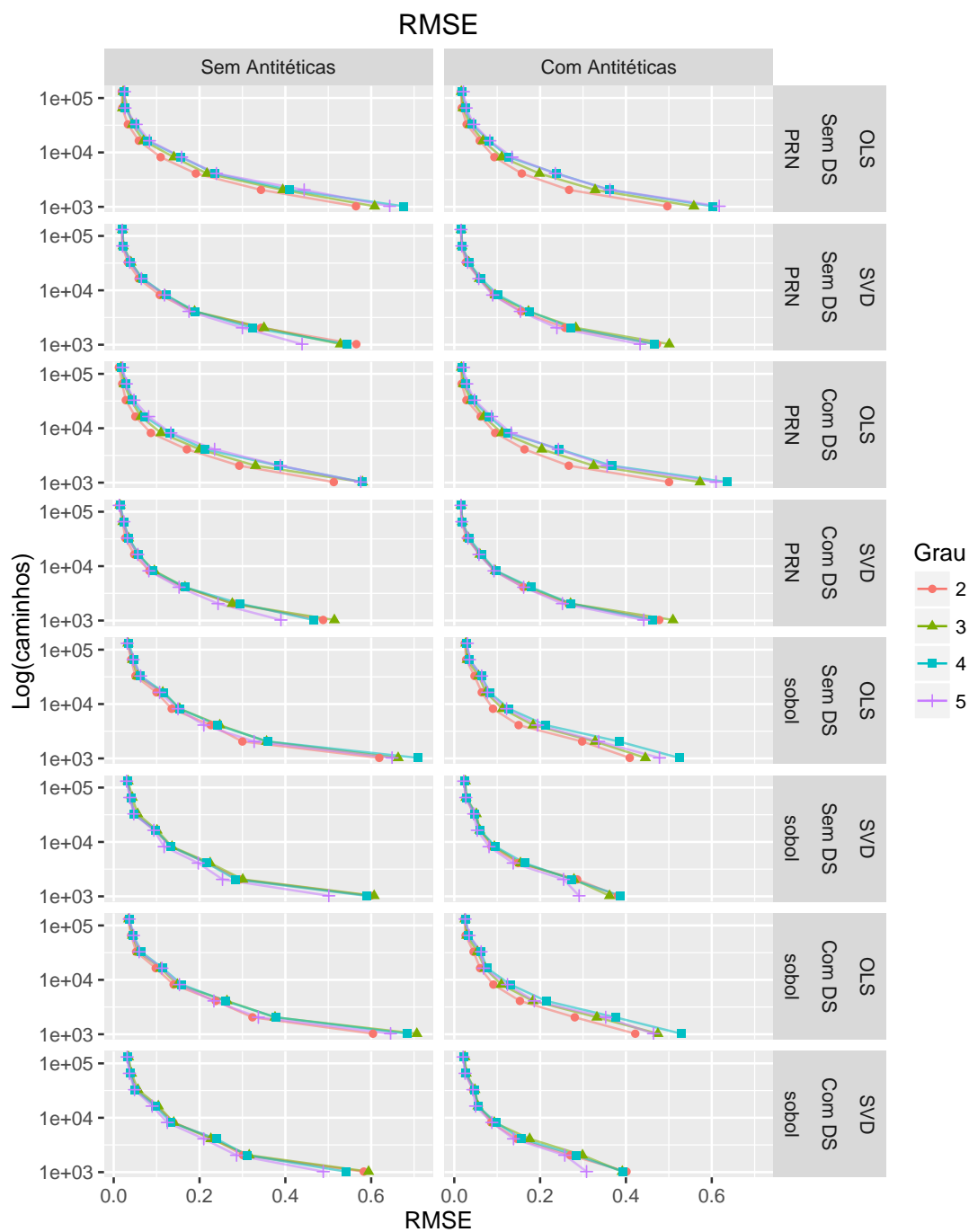


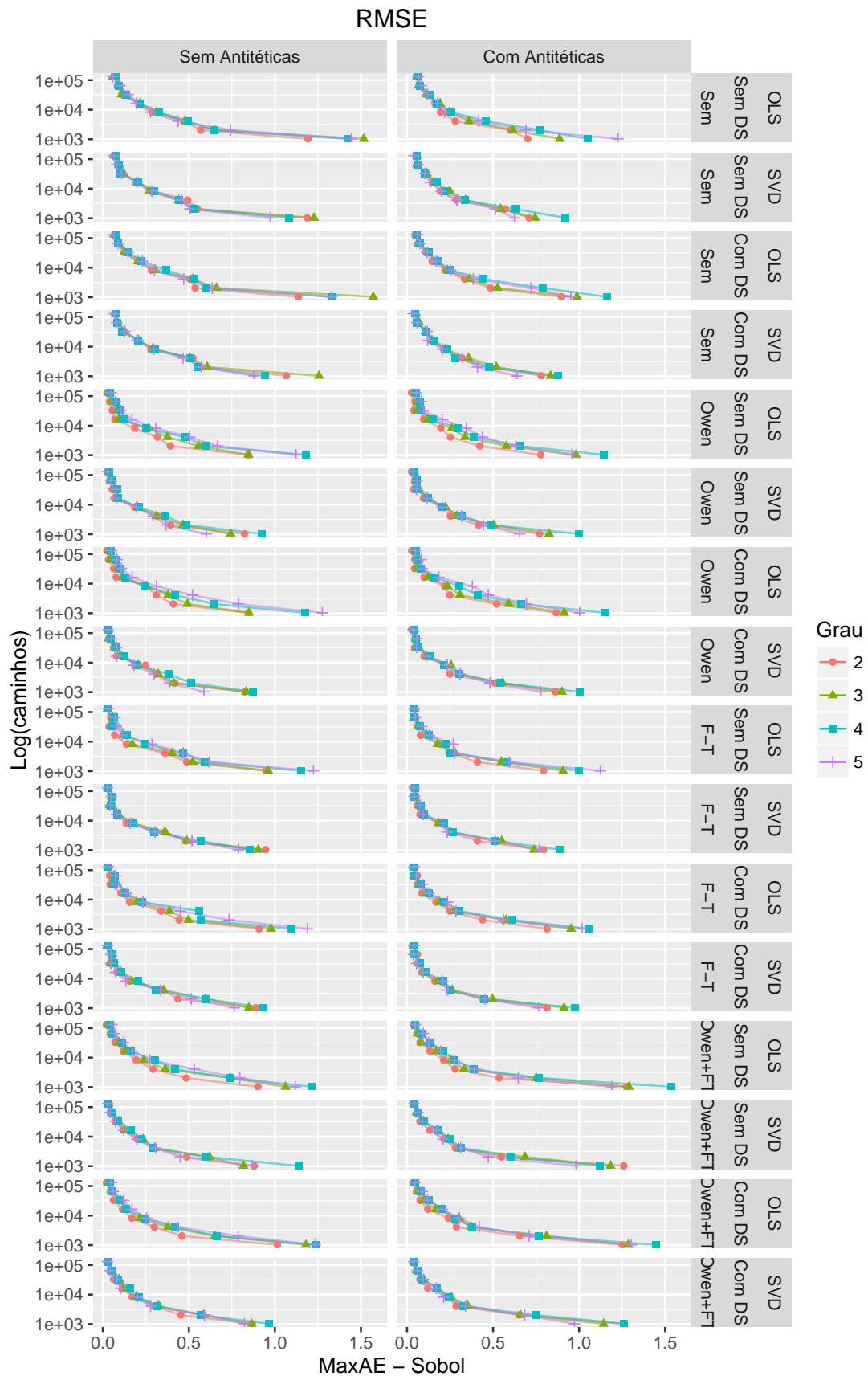


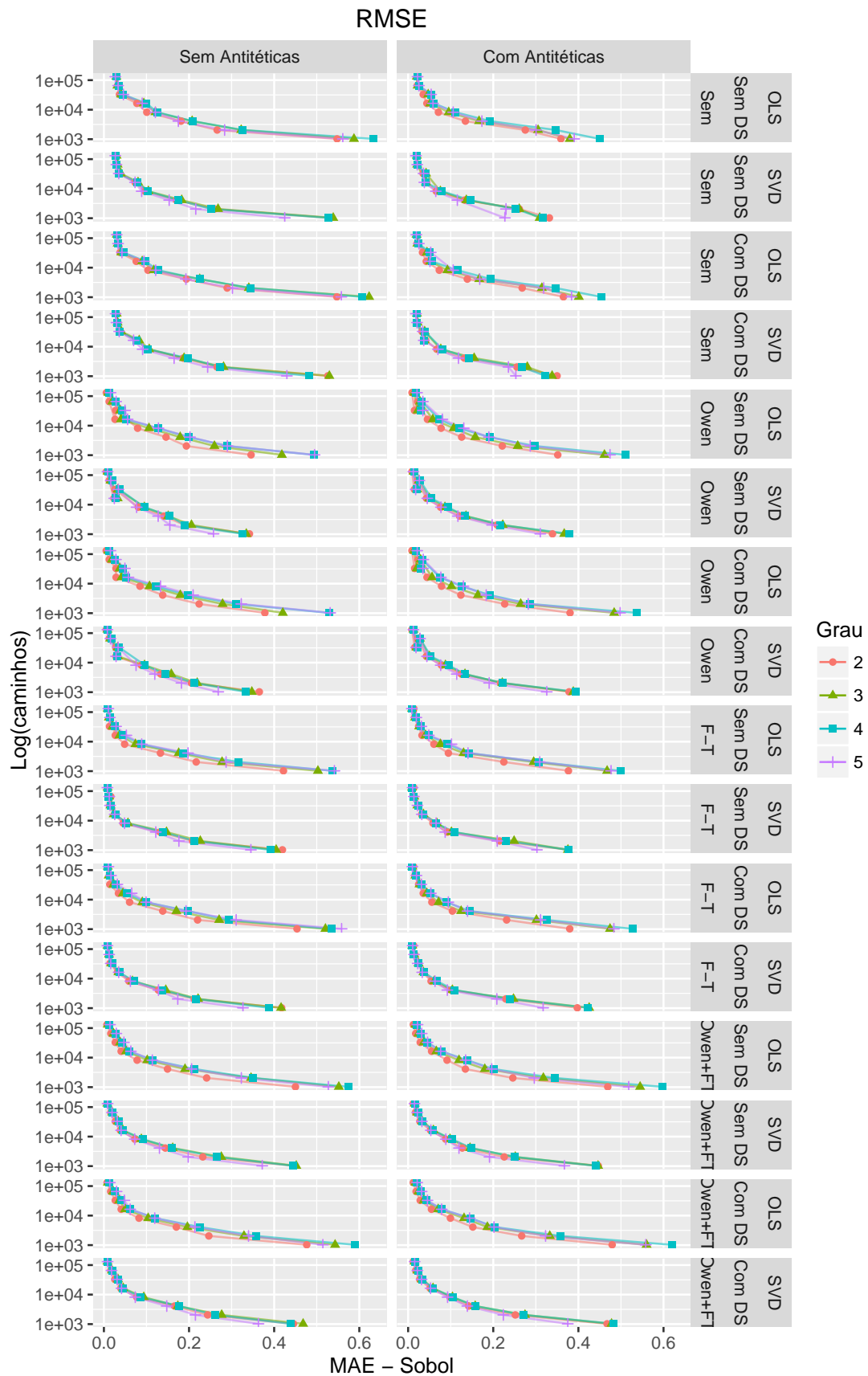


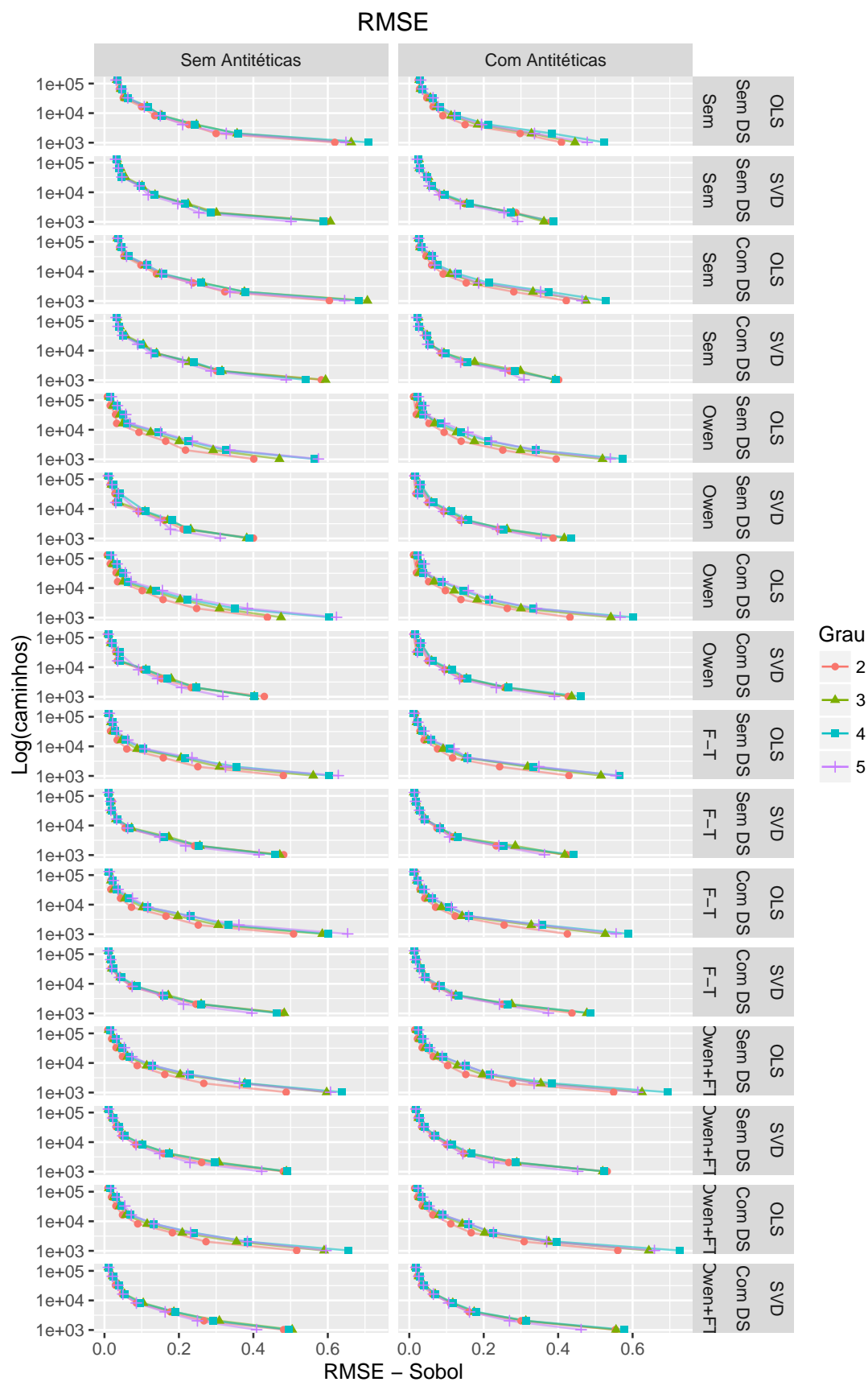


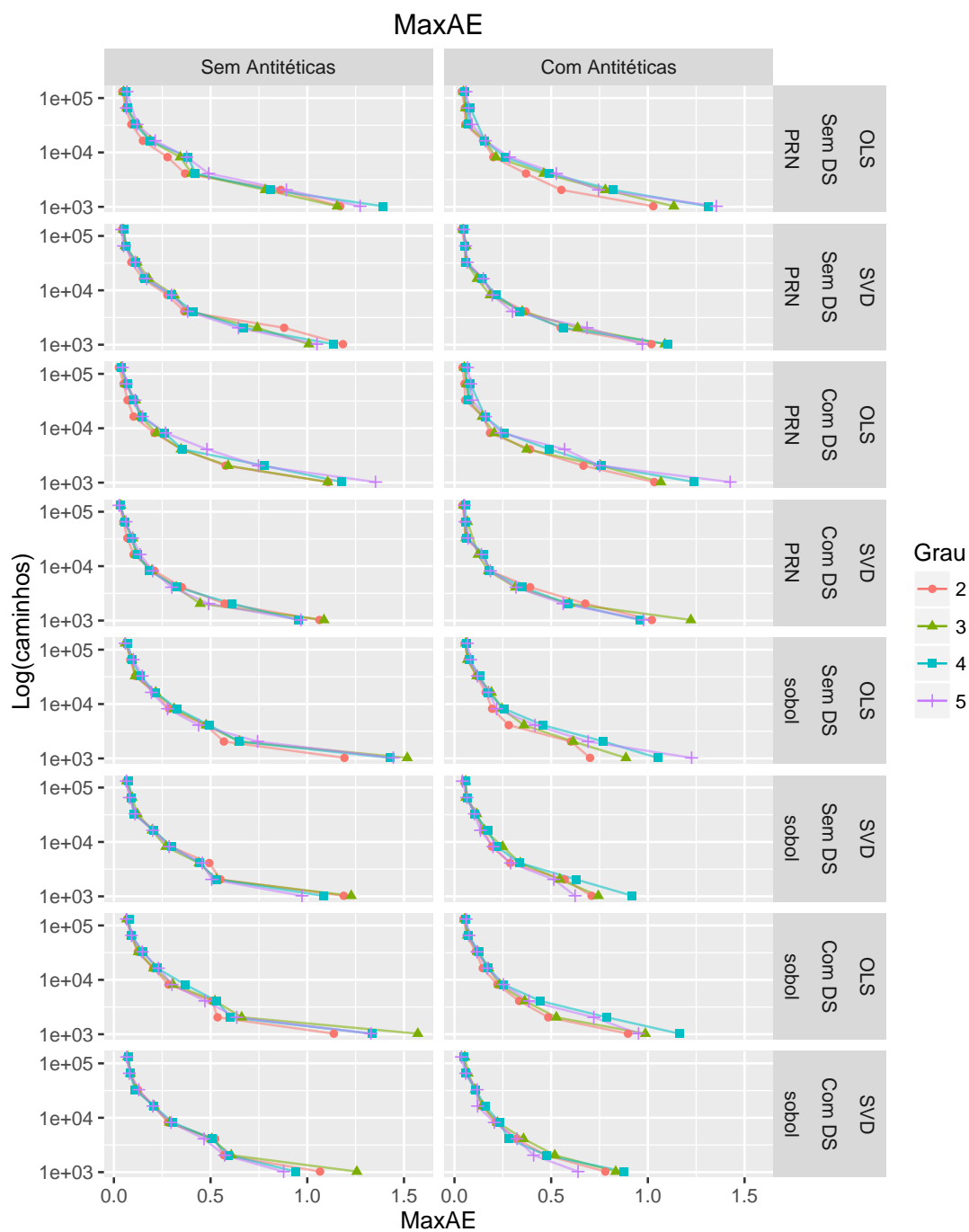


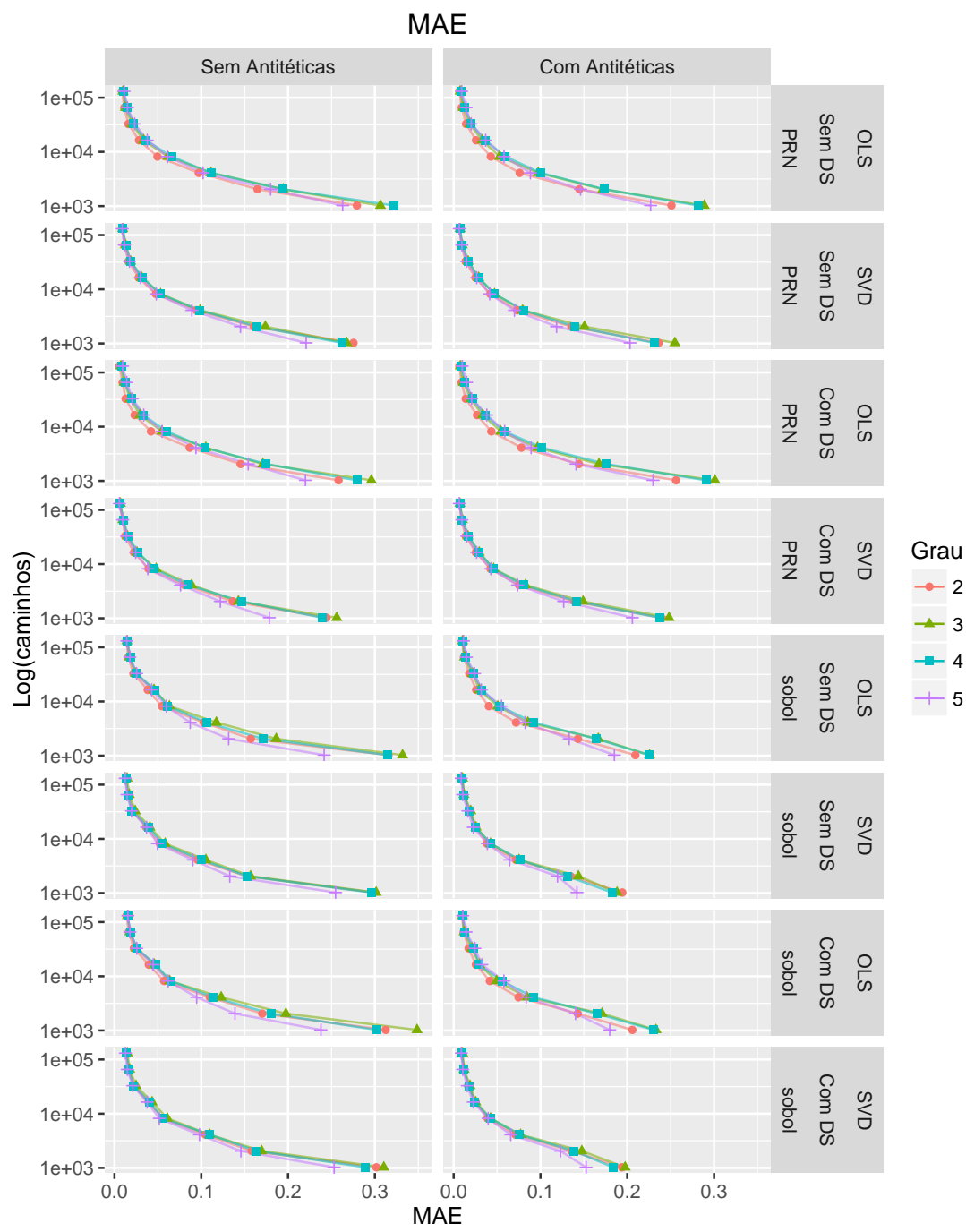


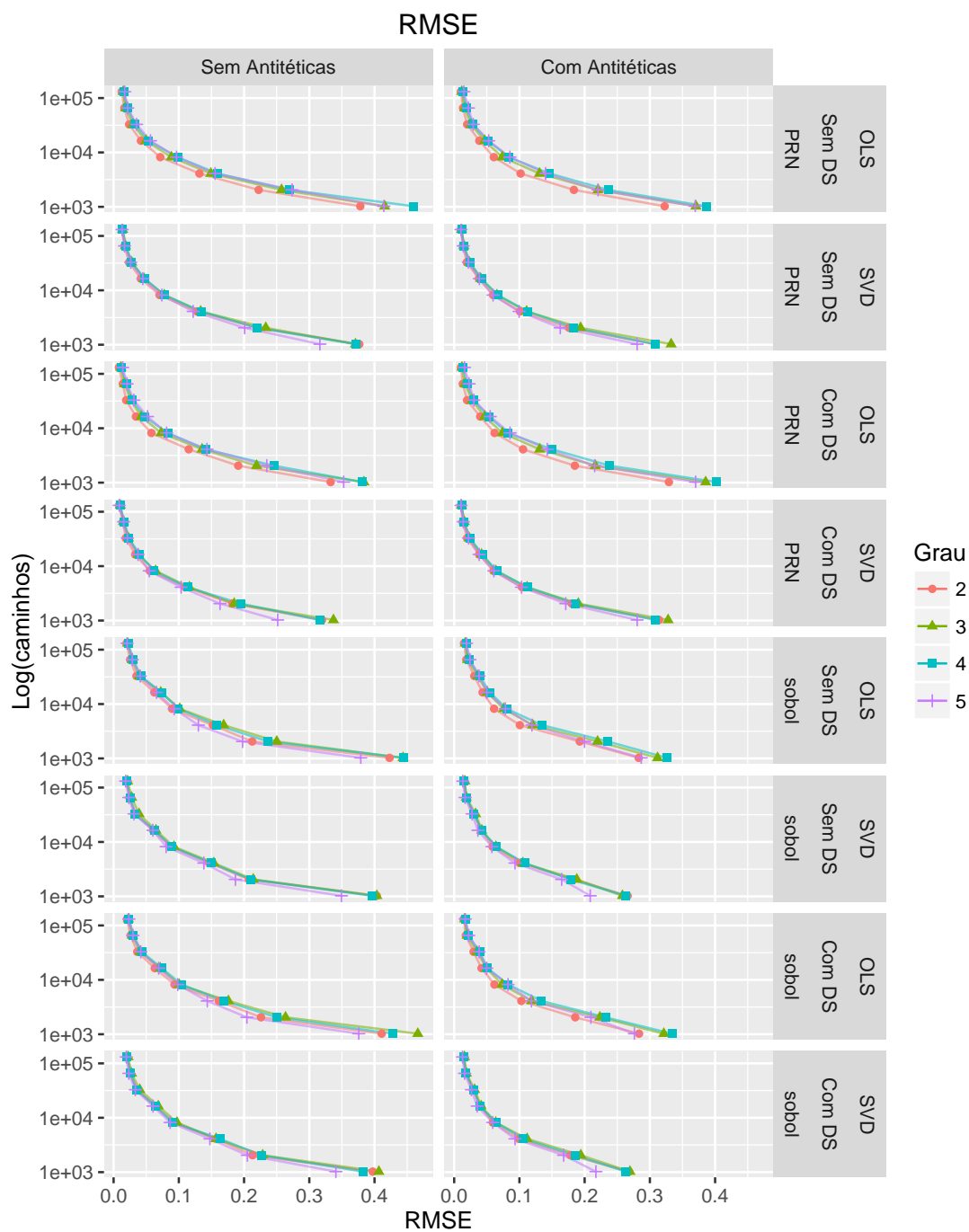


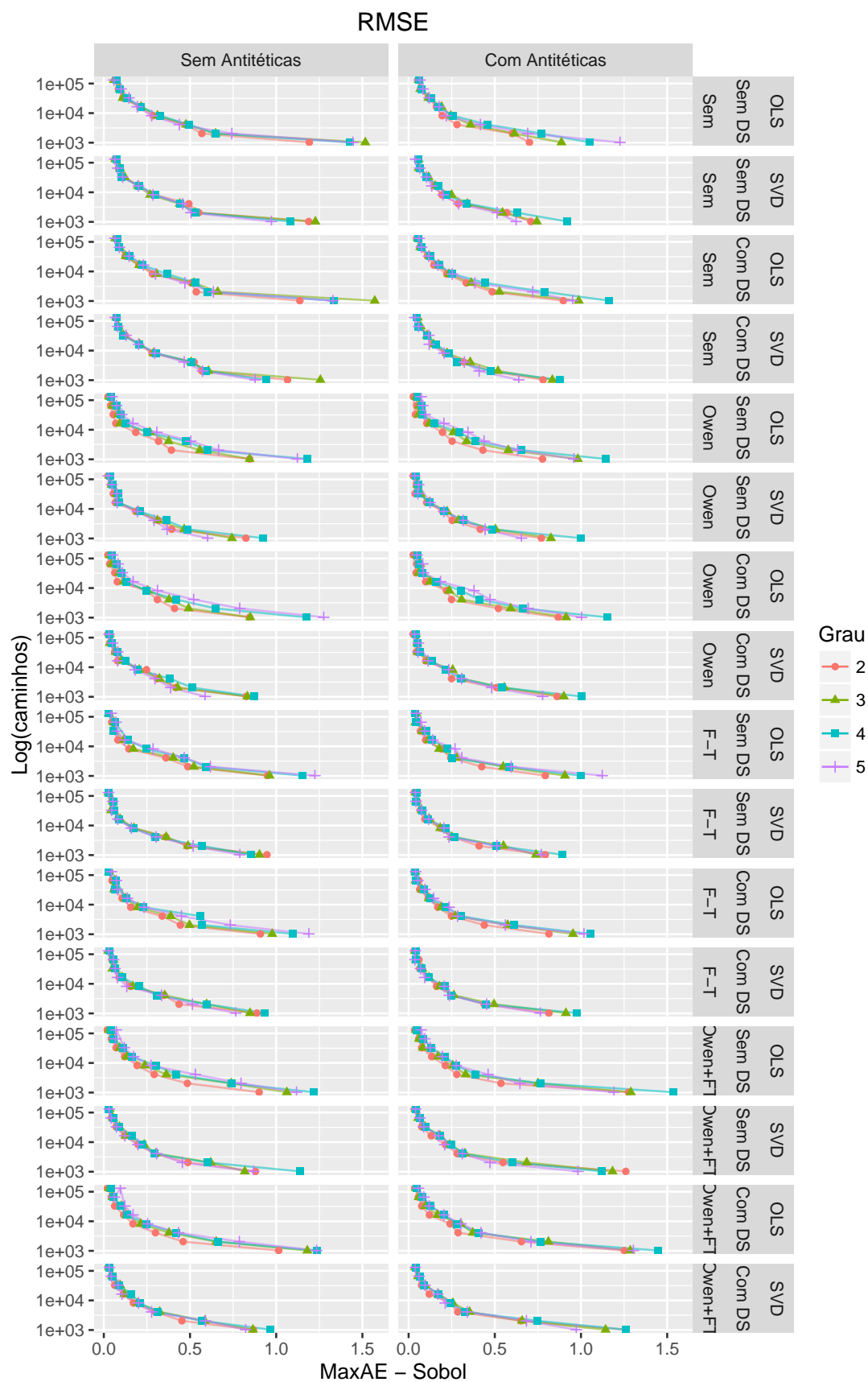


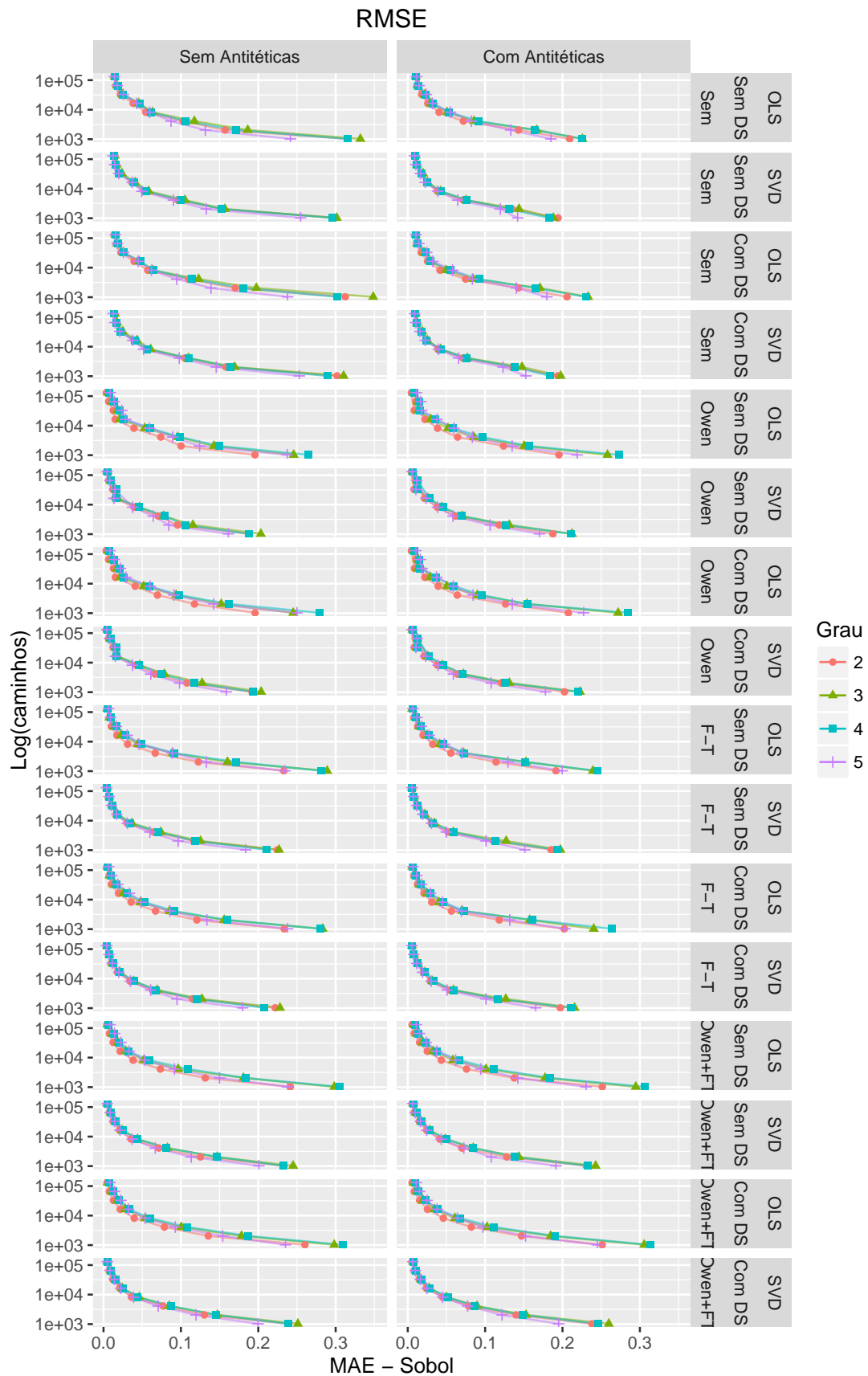




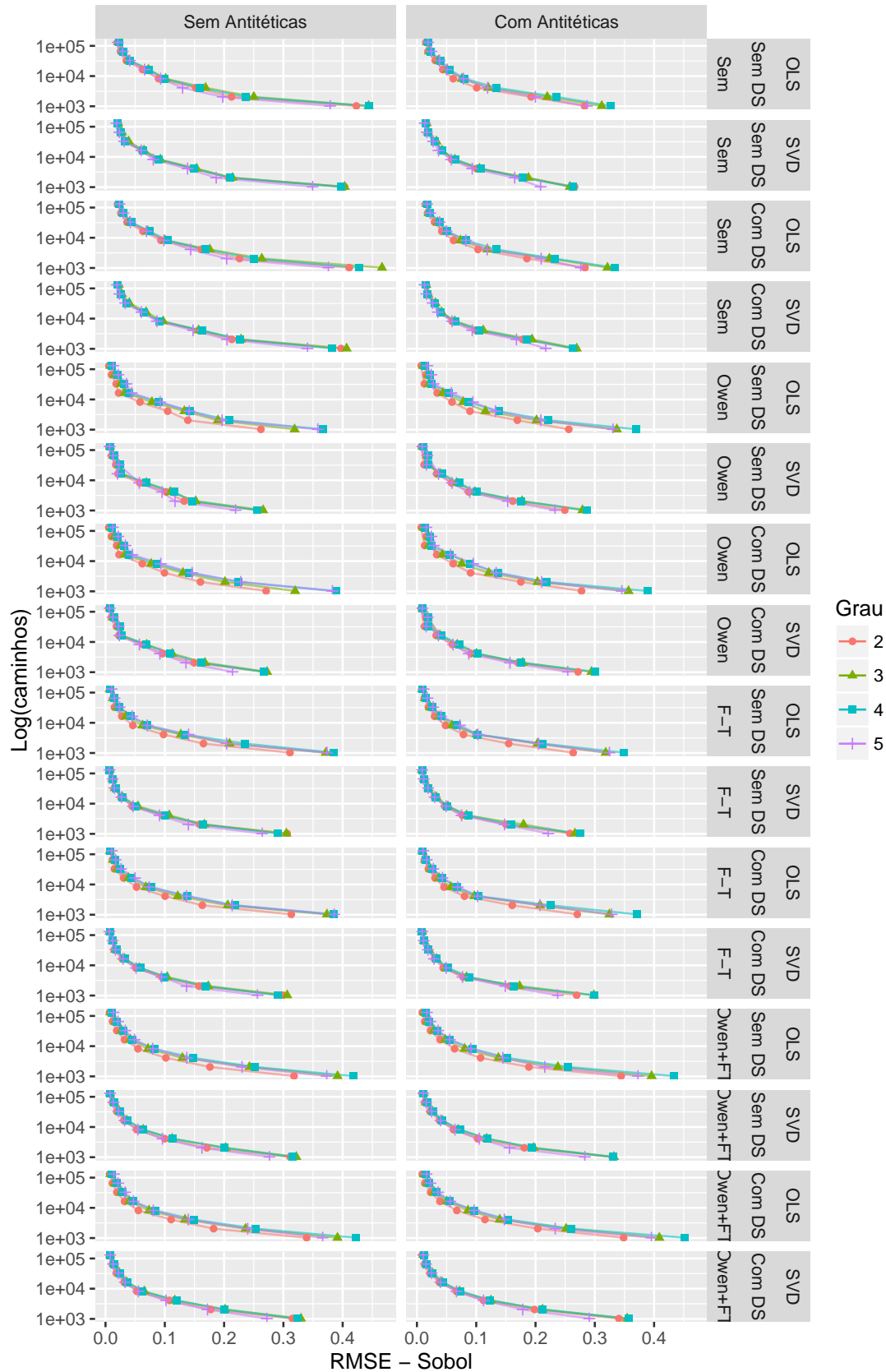


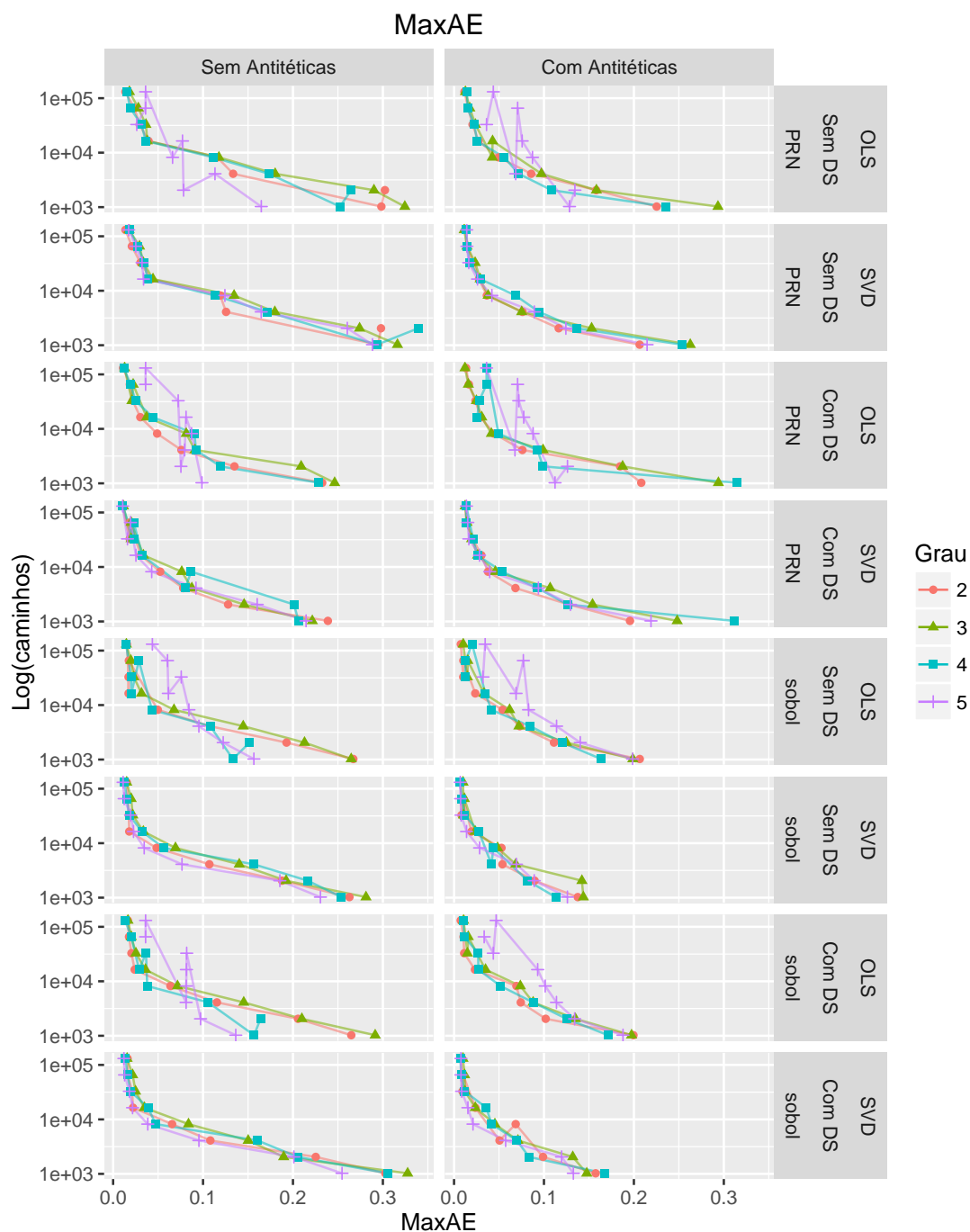


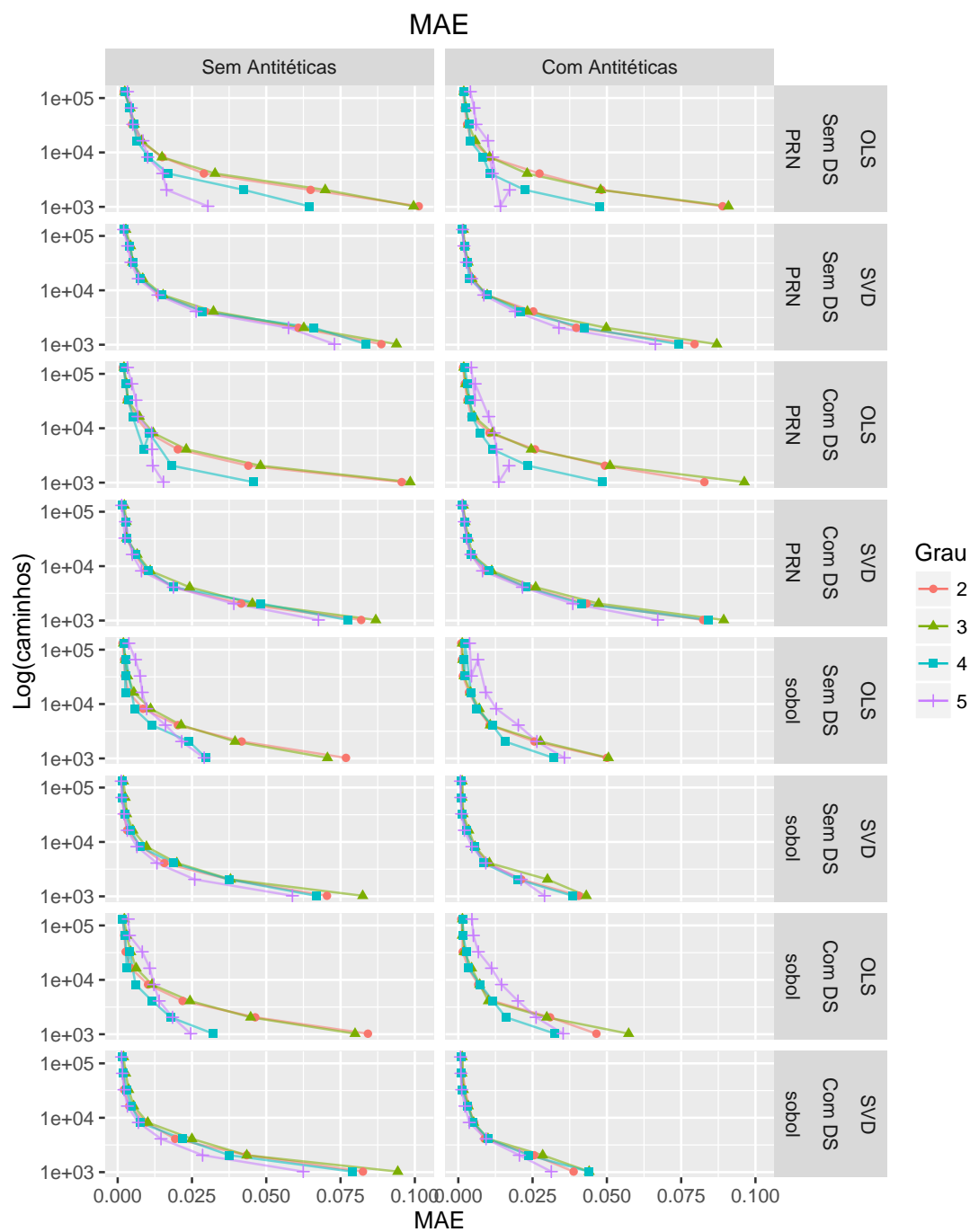


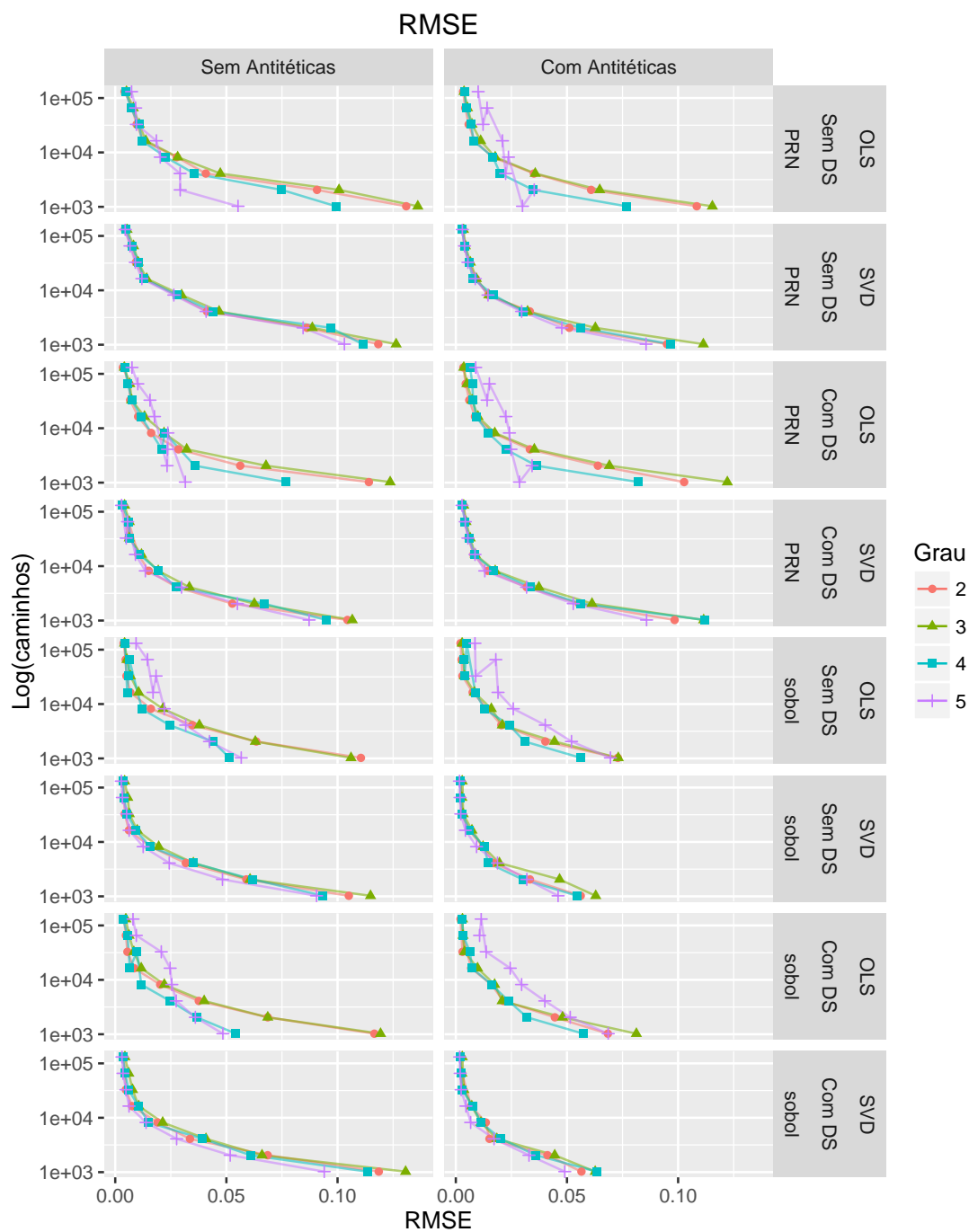


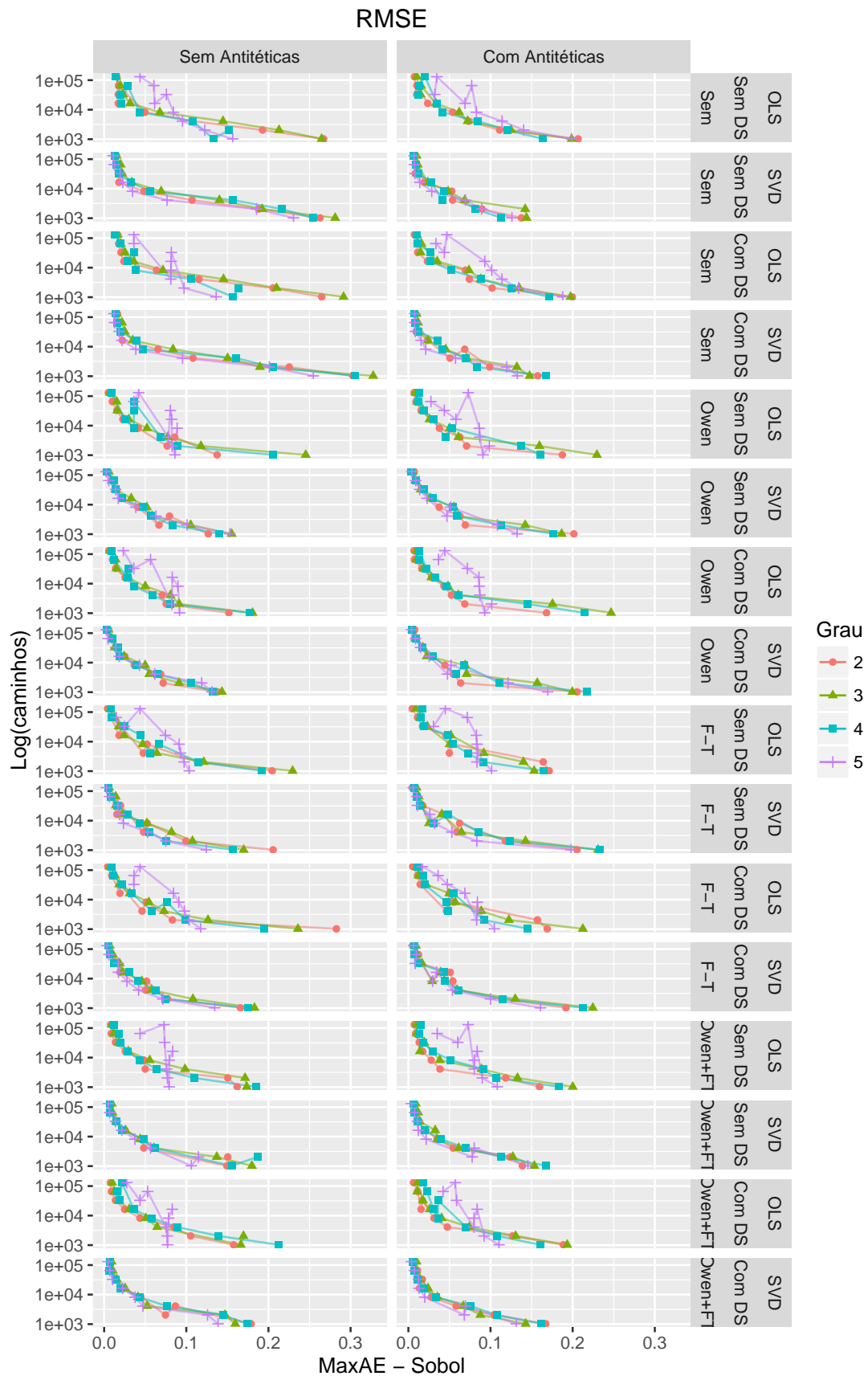
RMSE

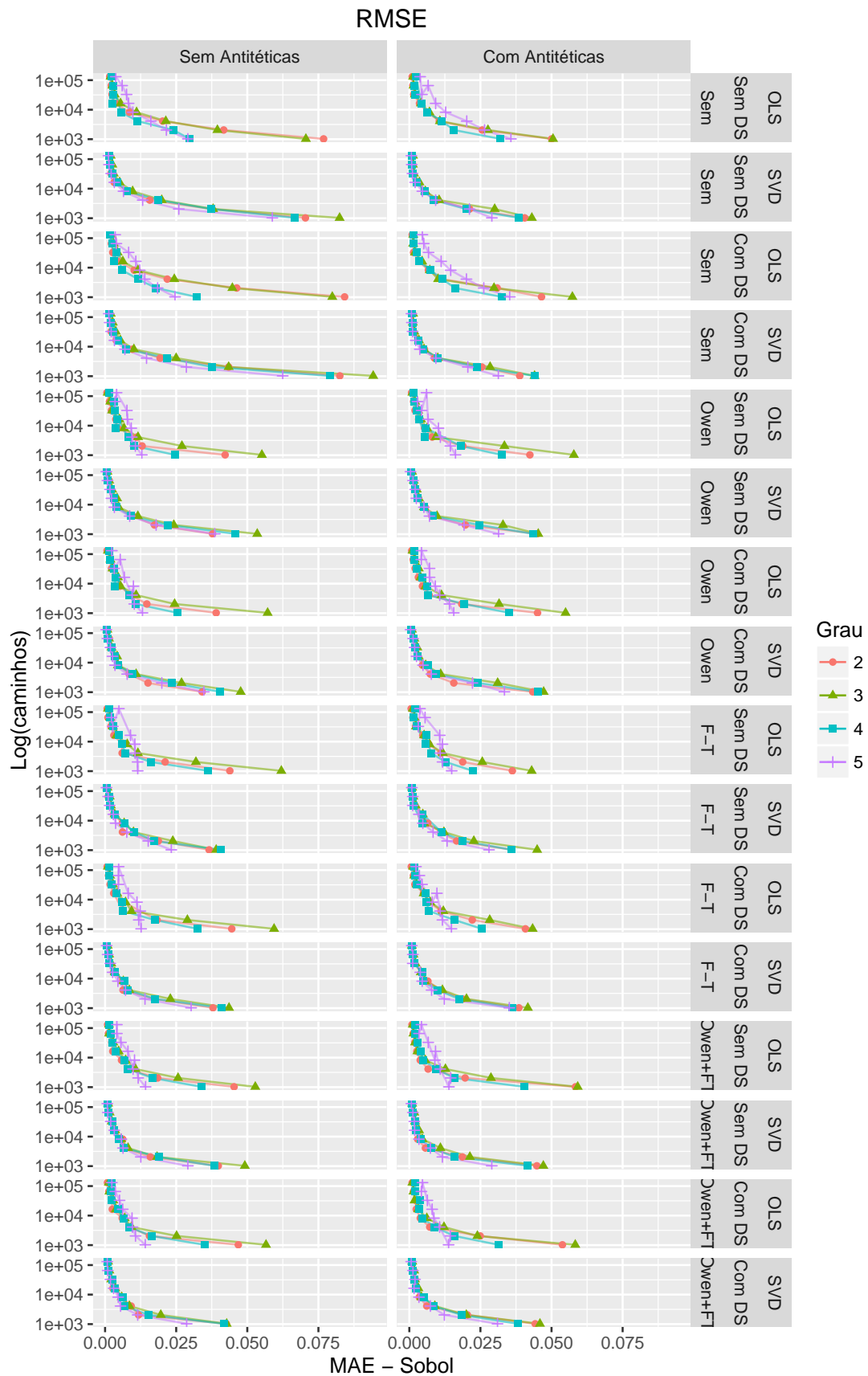


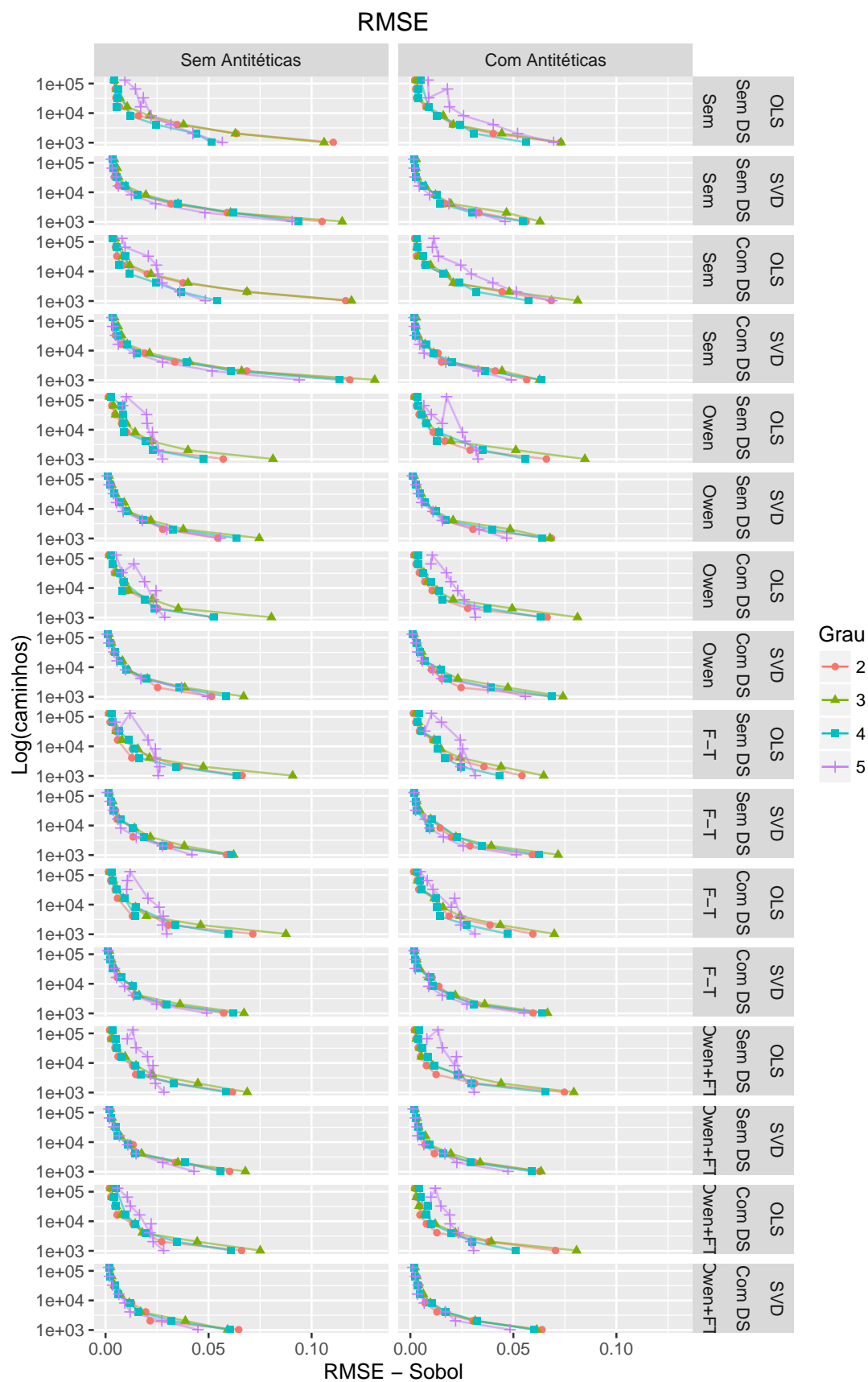


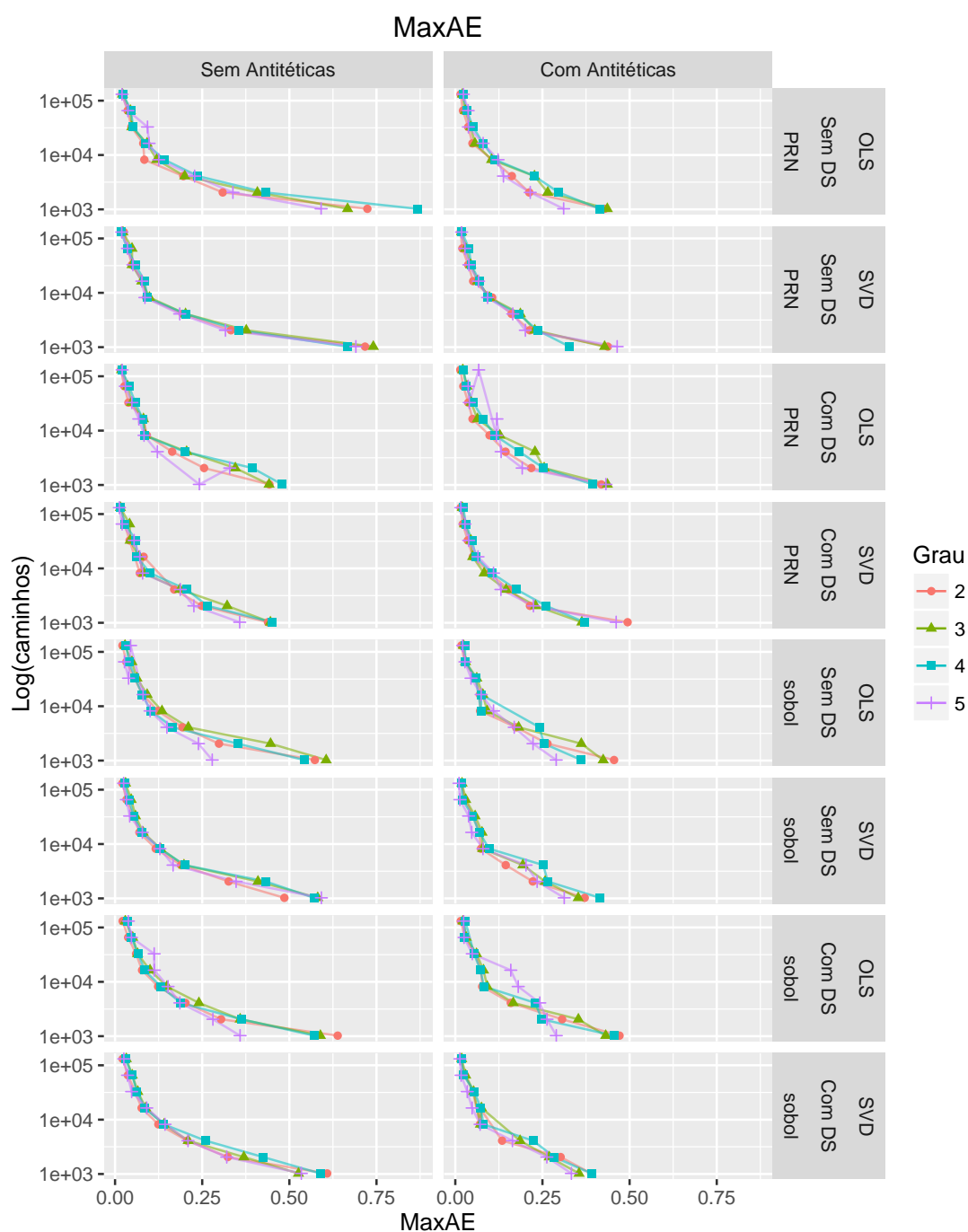


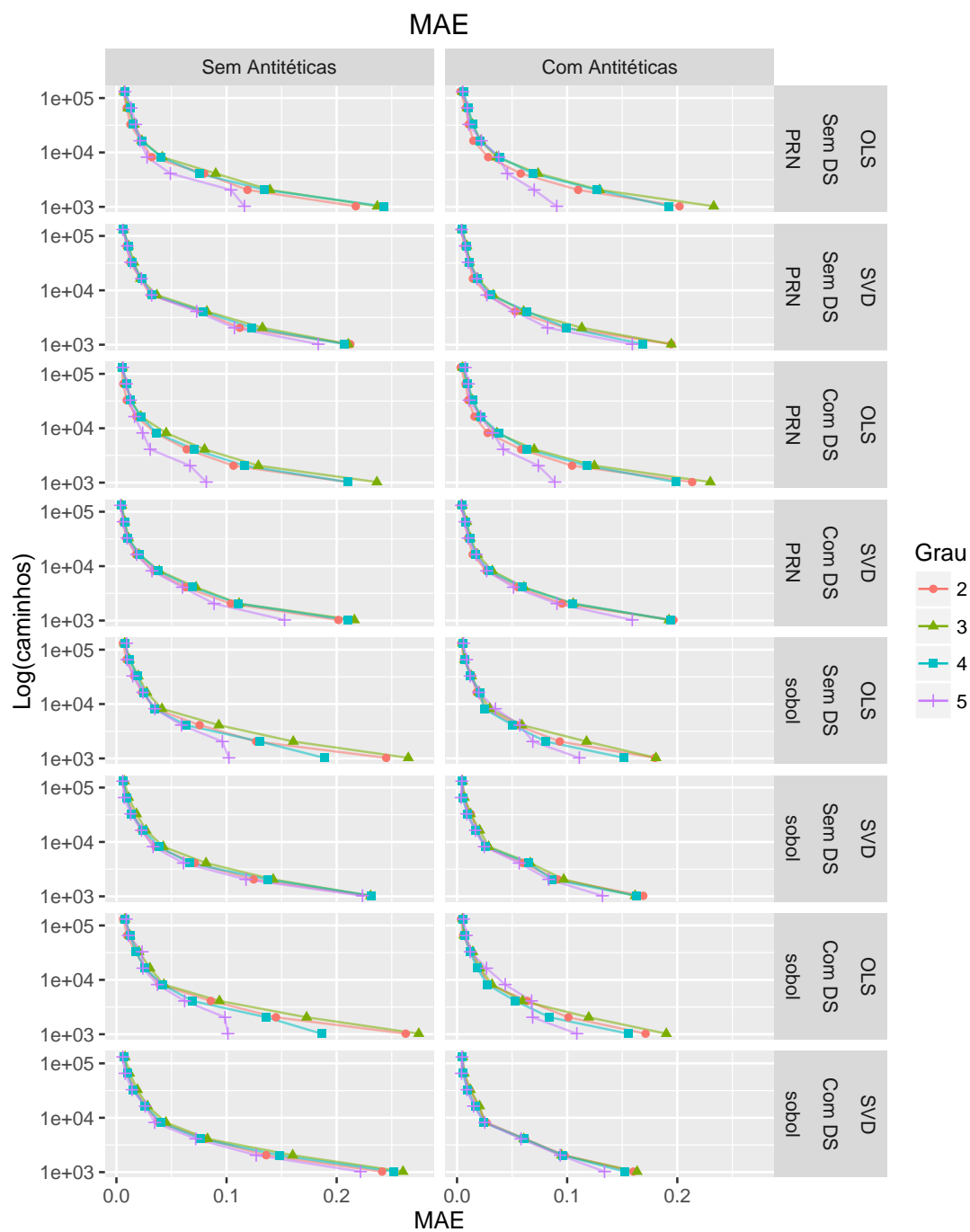


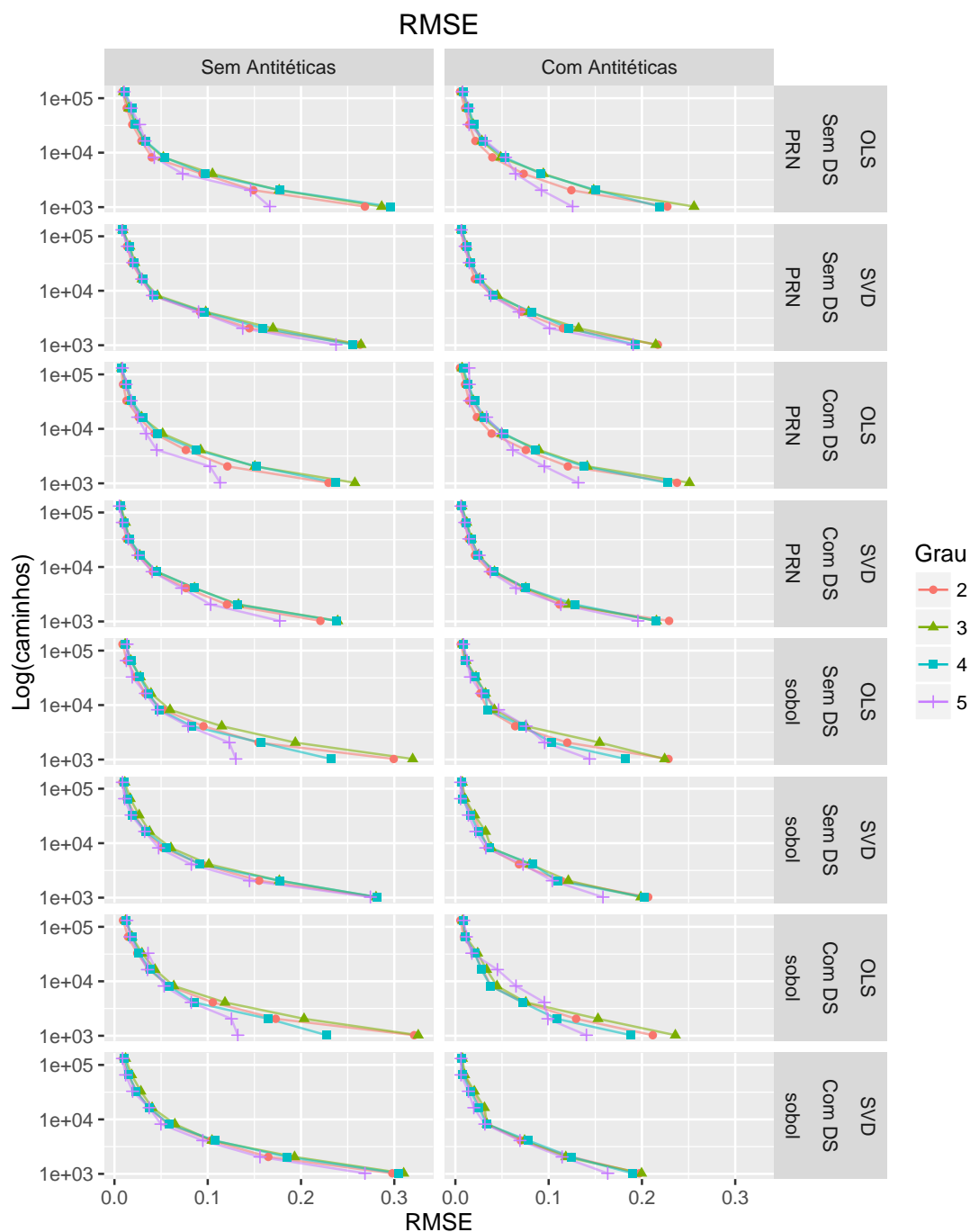


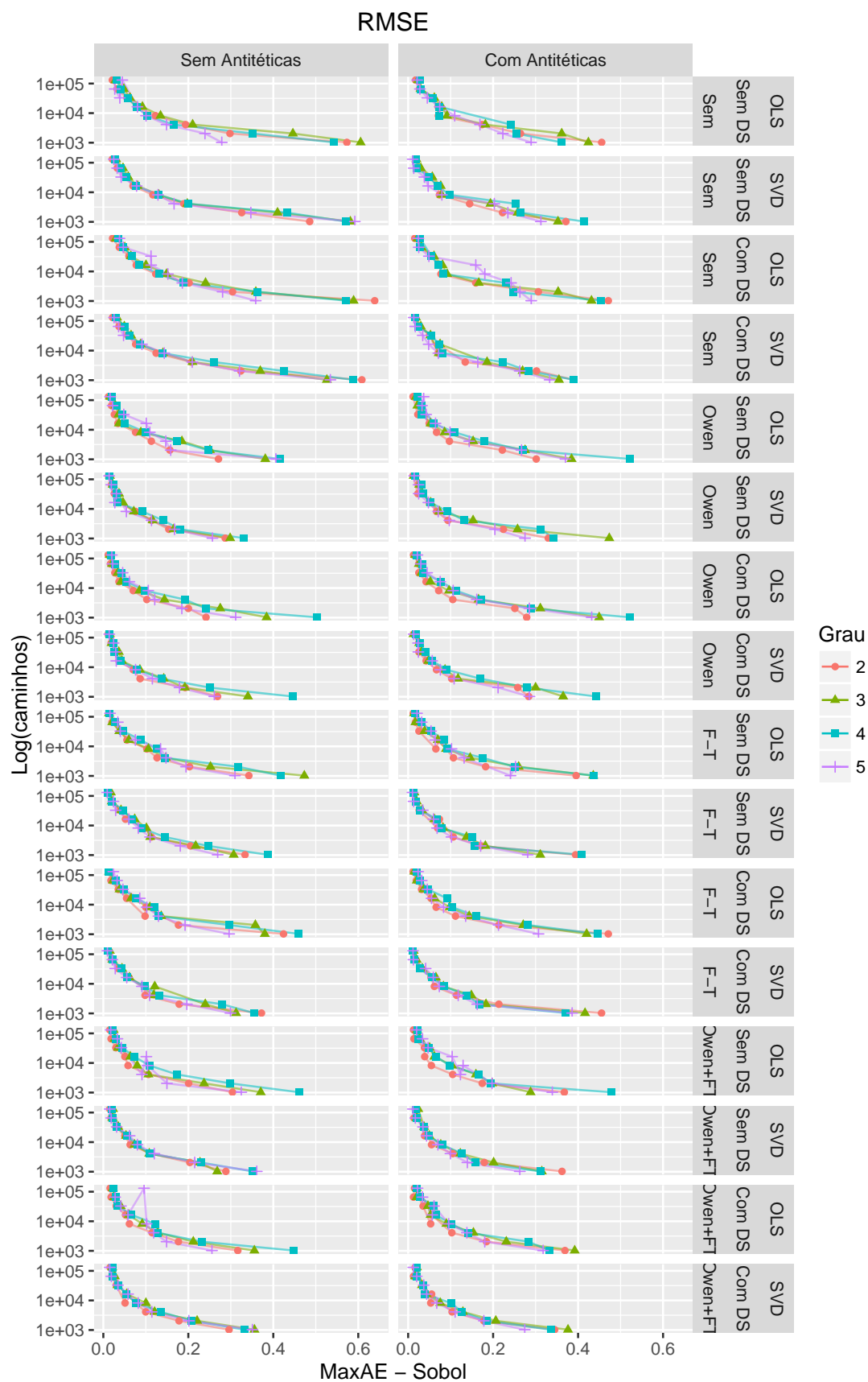


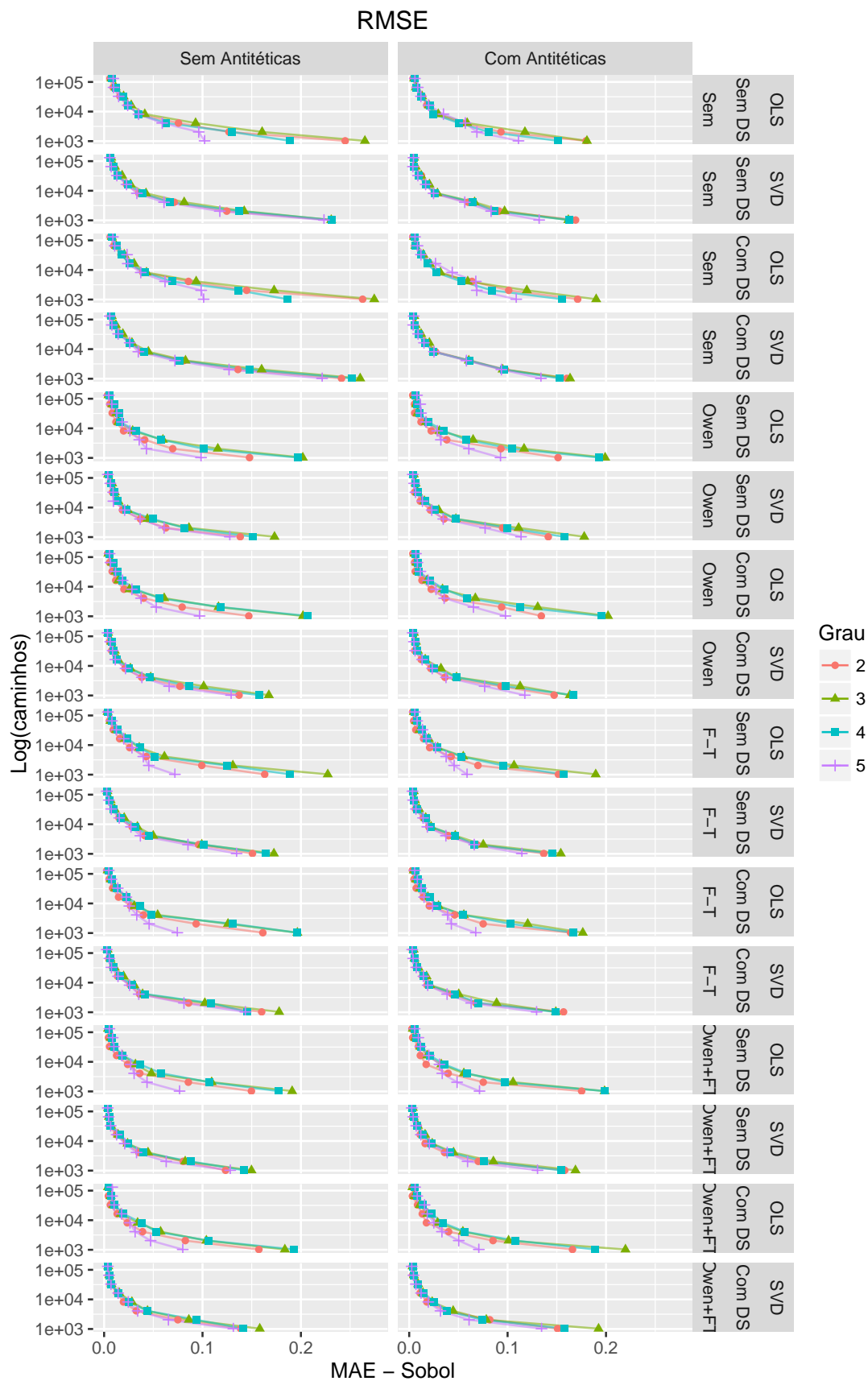


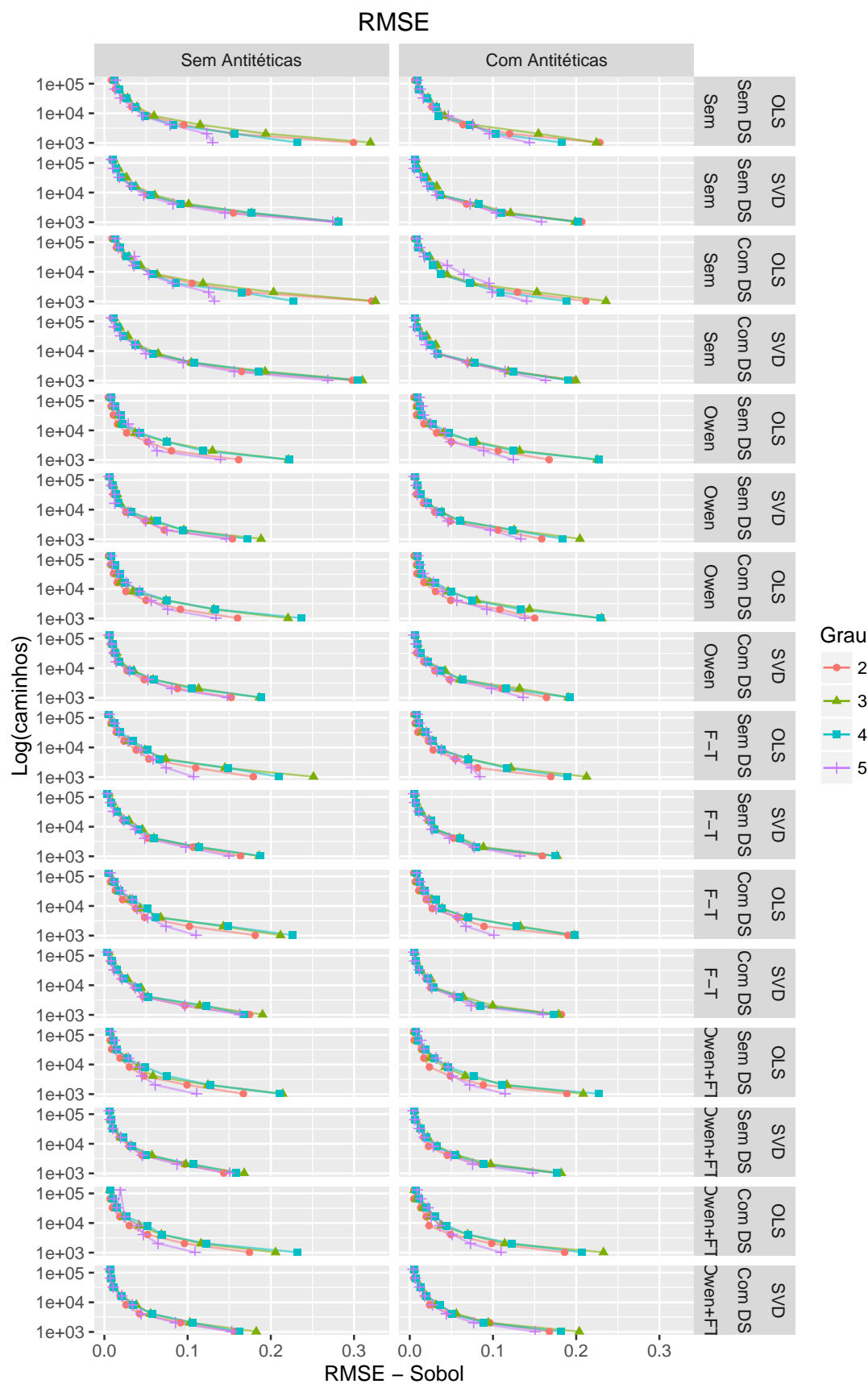


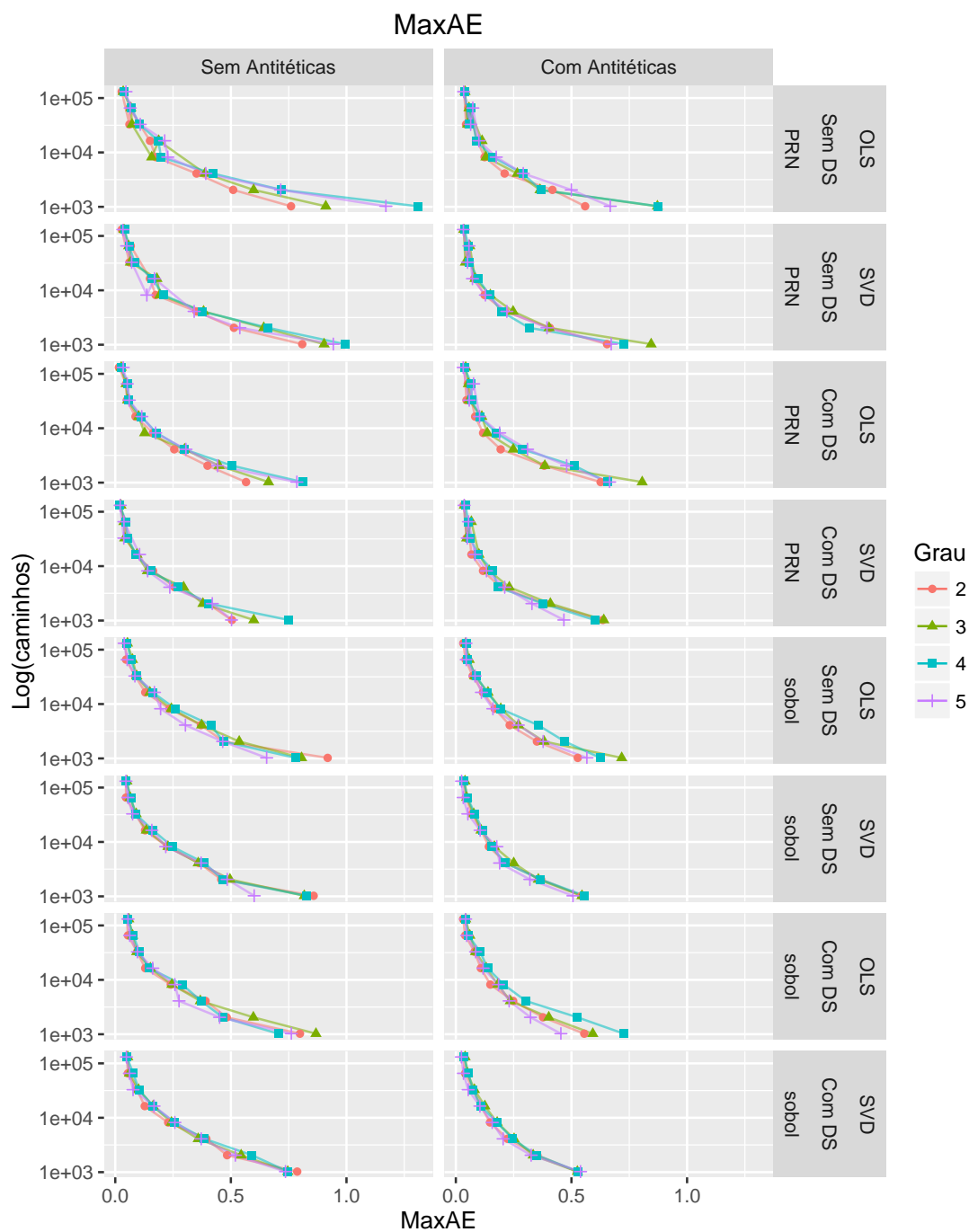


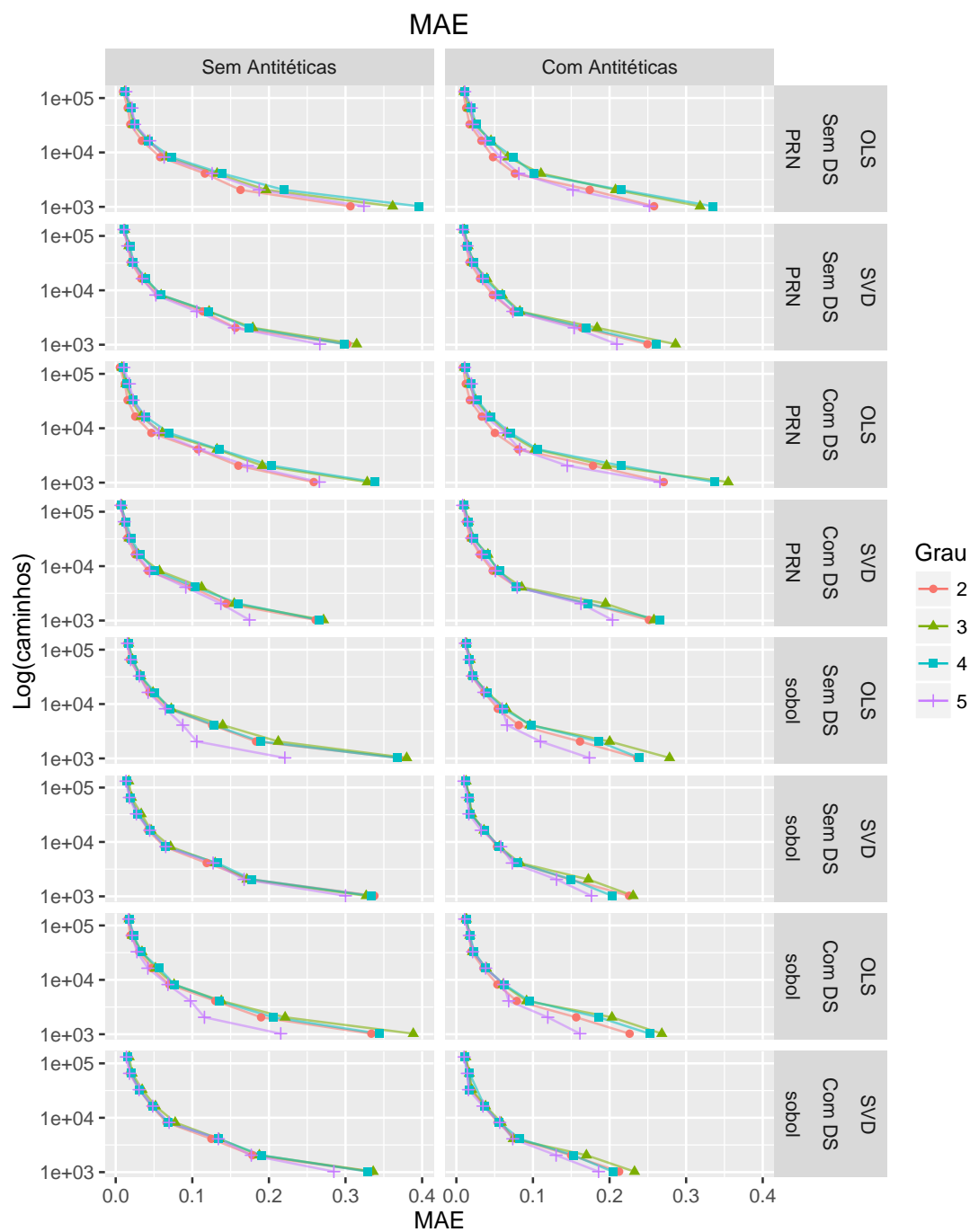


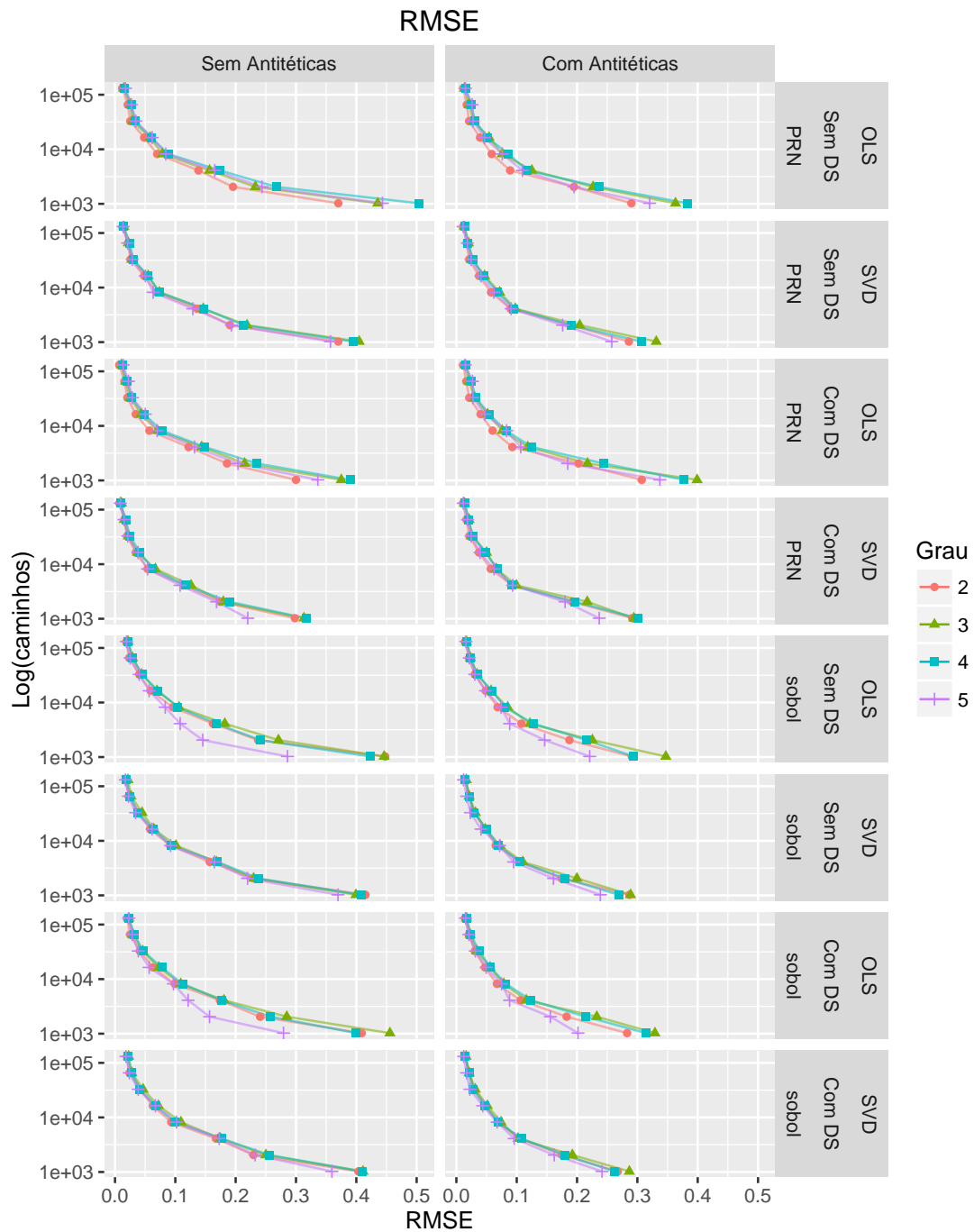


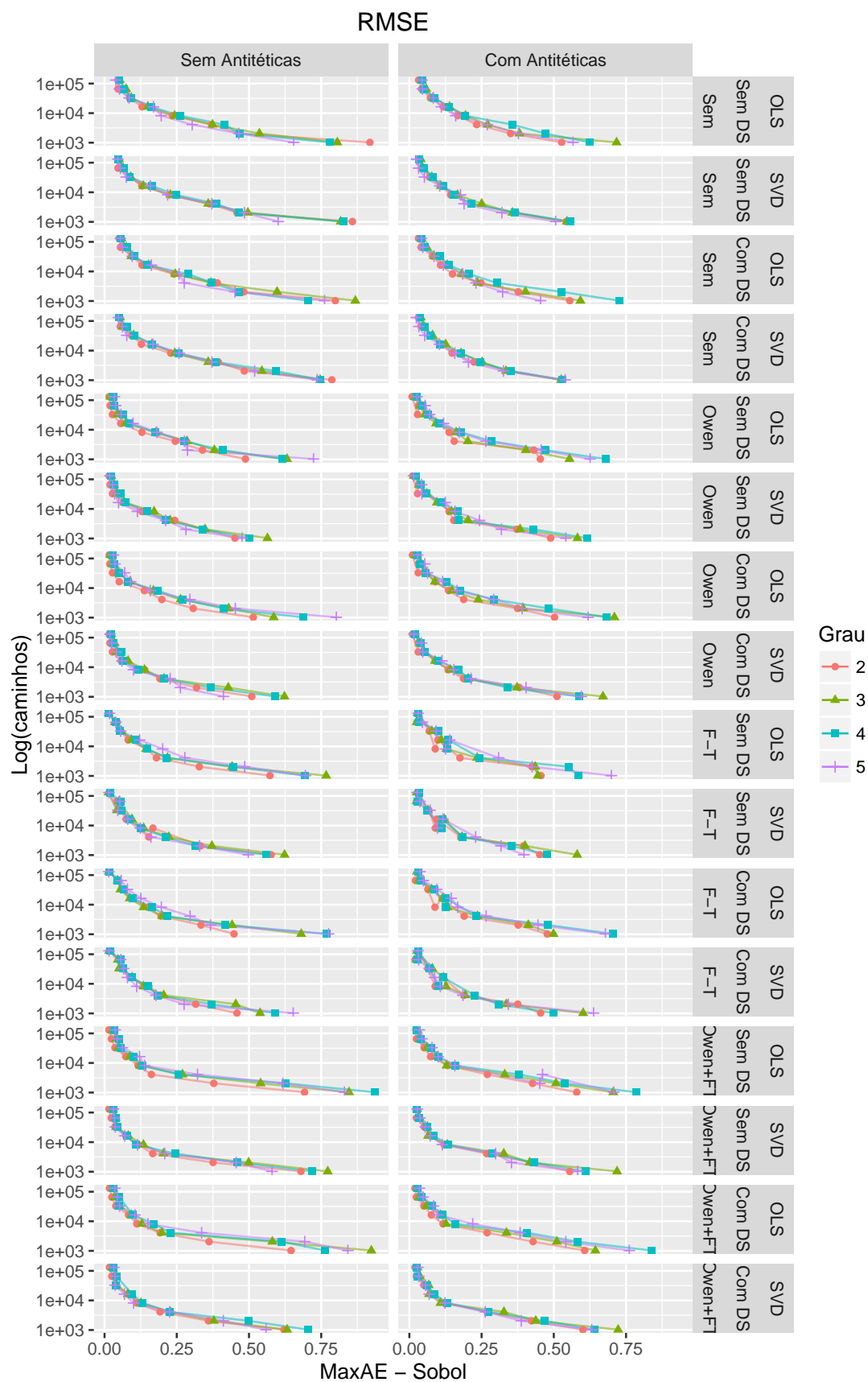


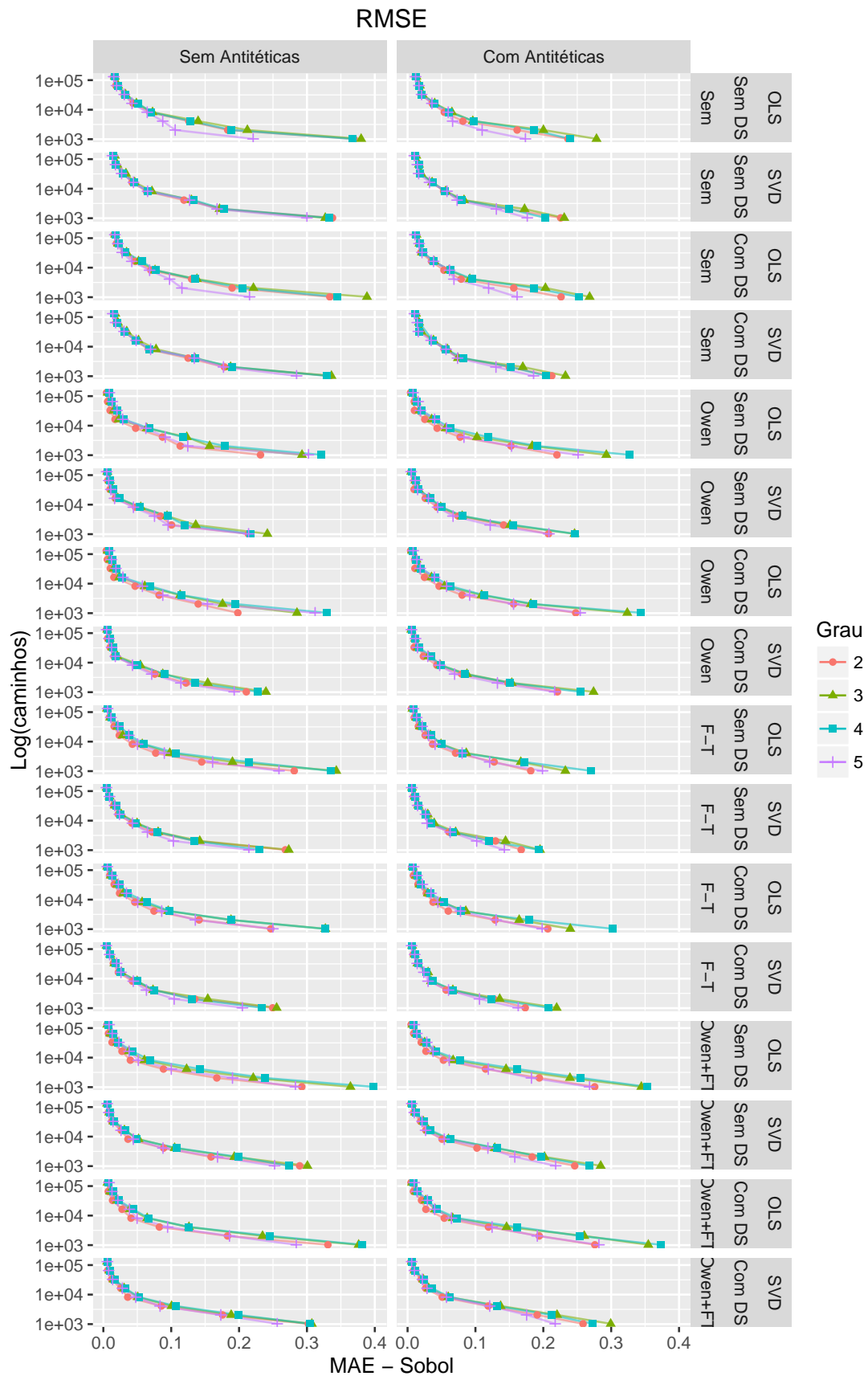


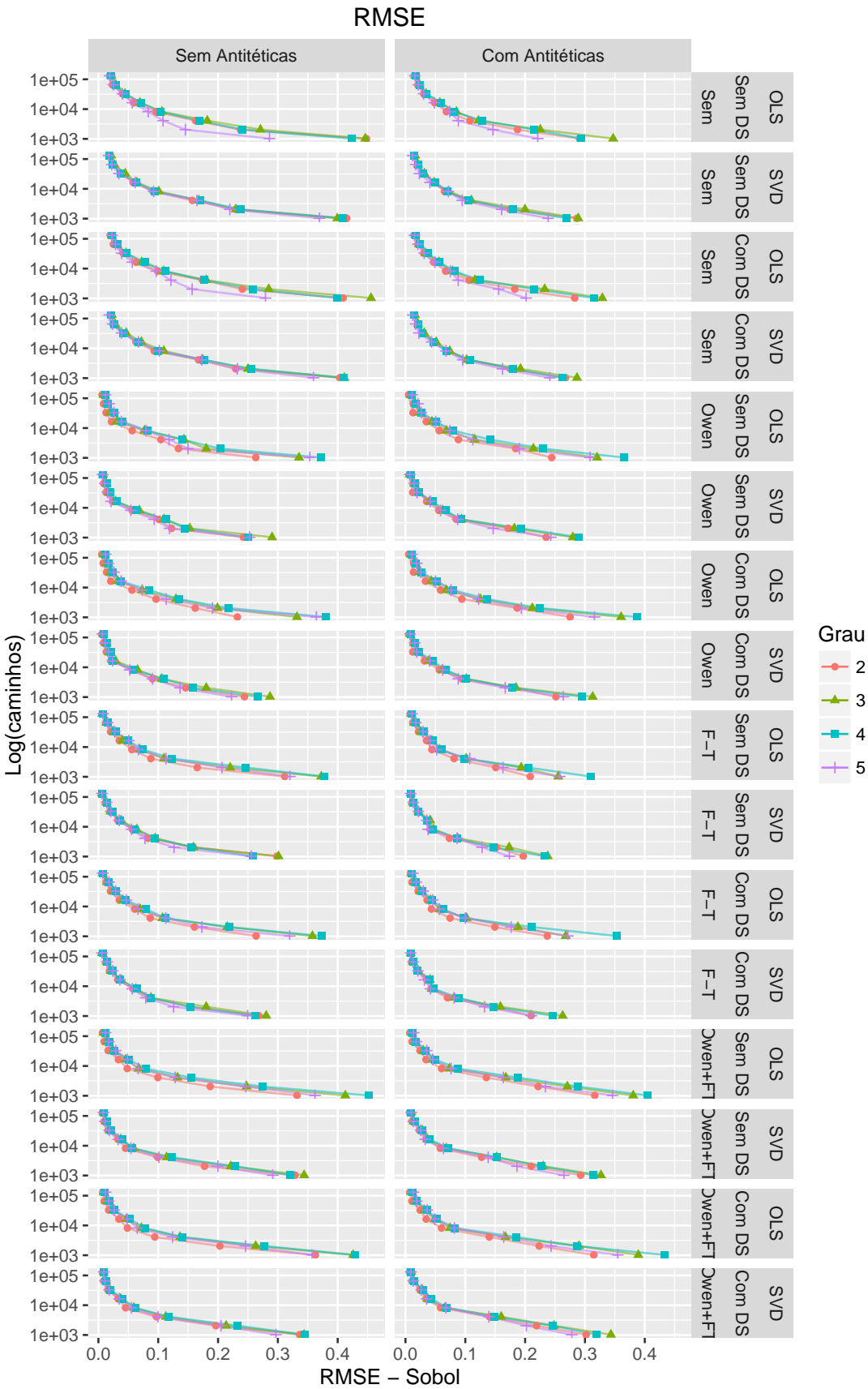


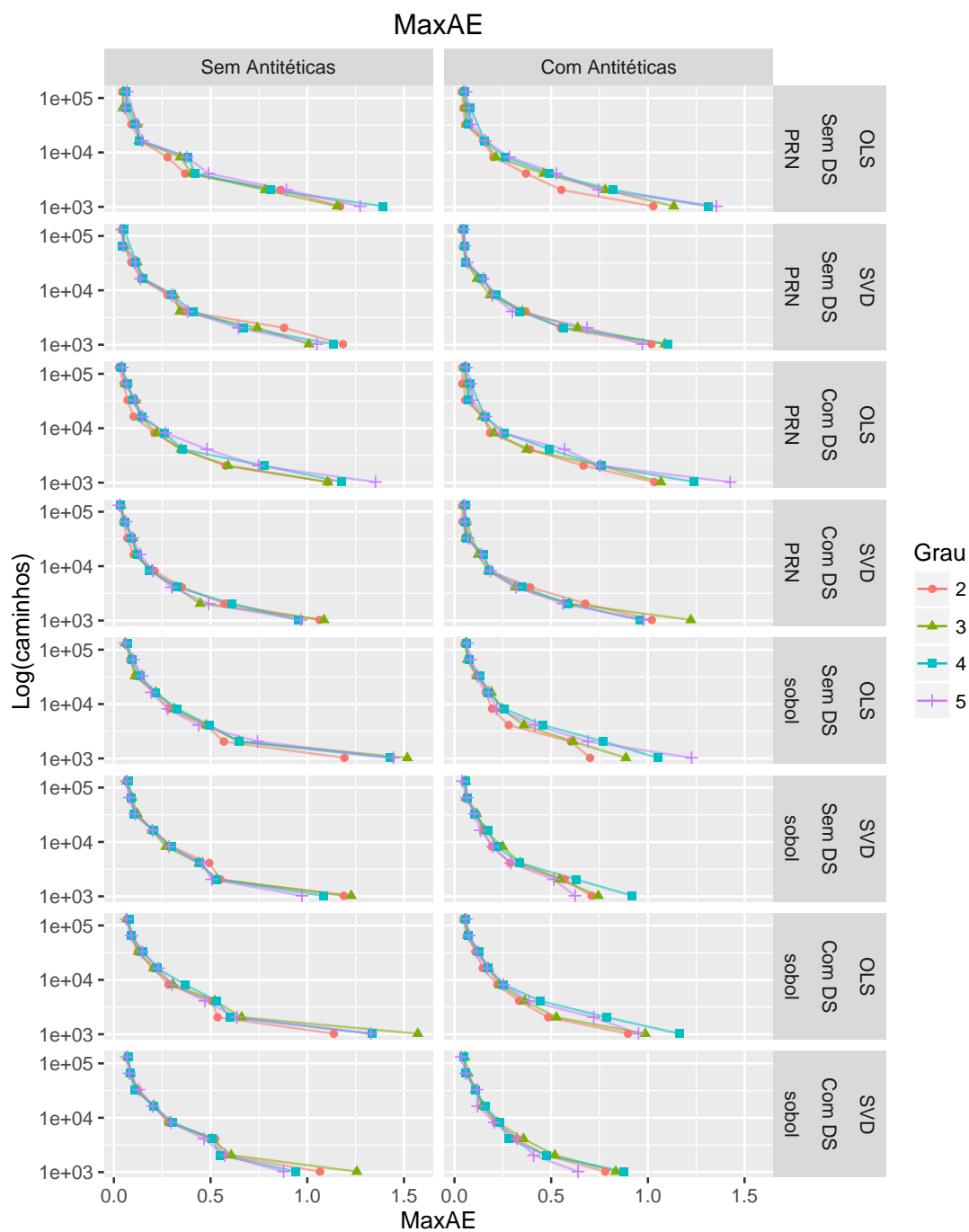


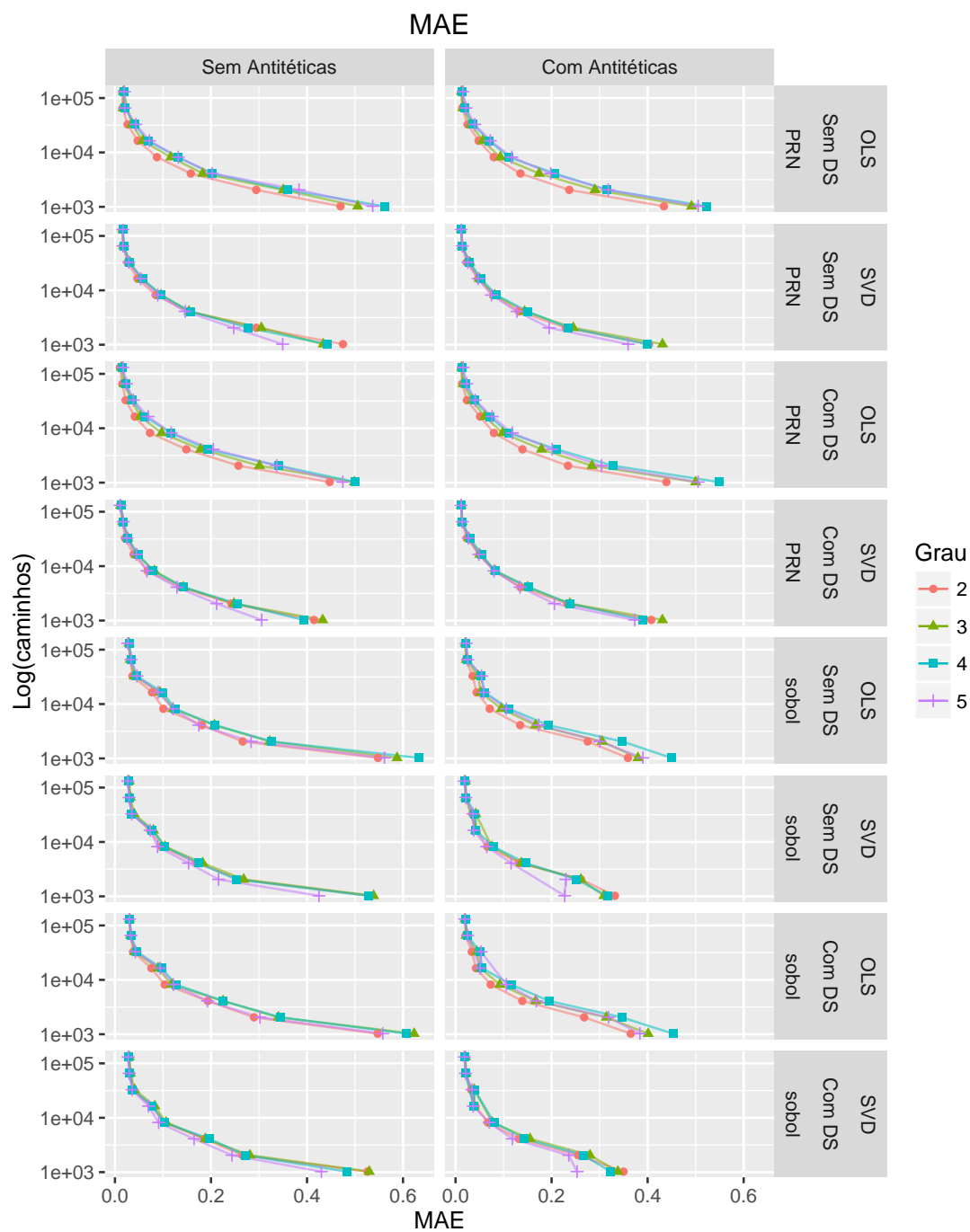


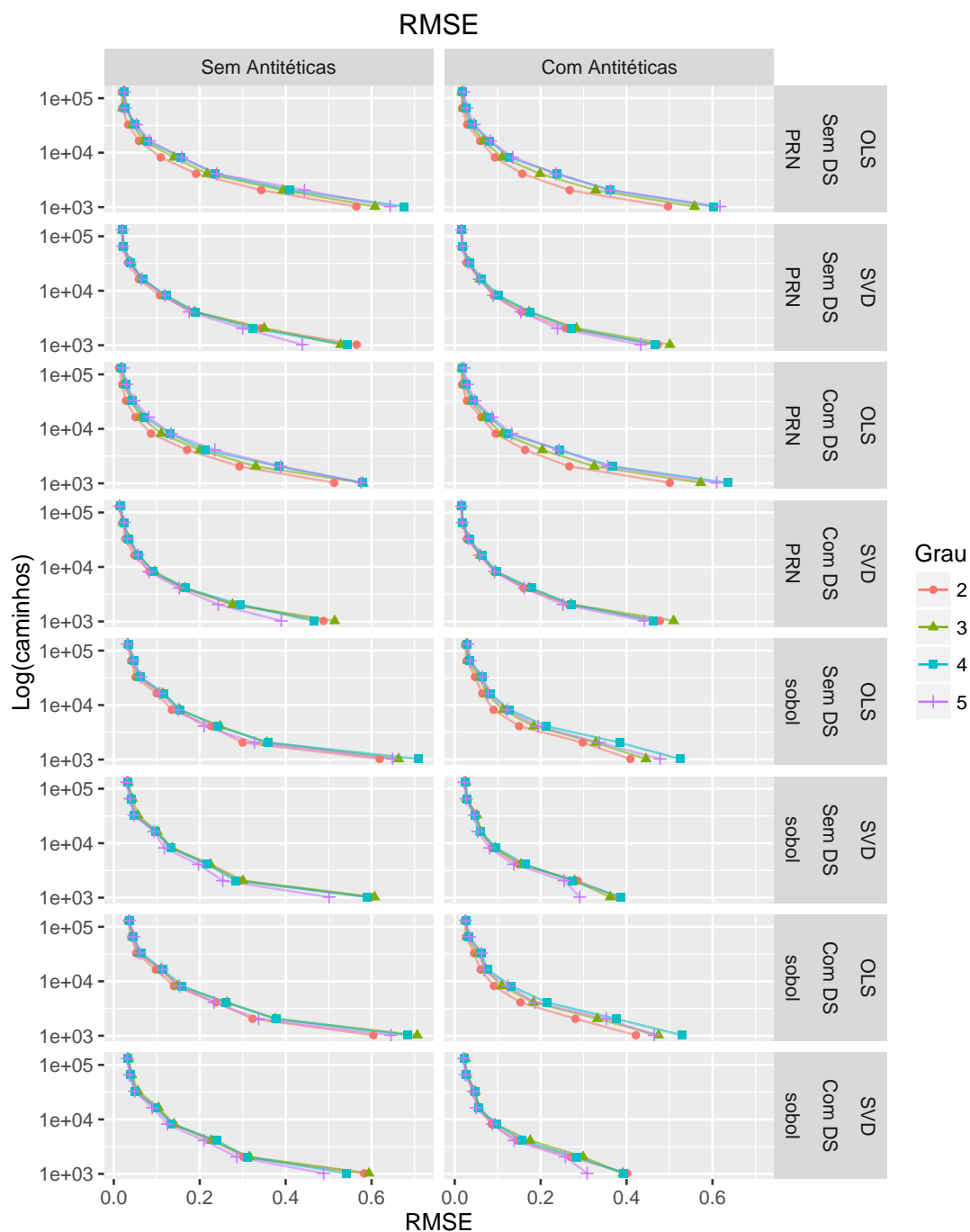




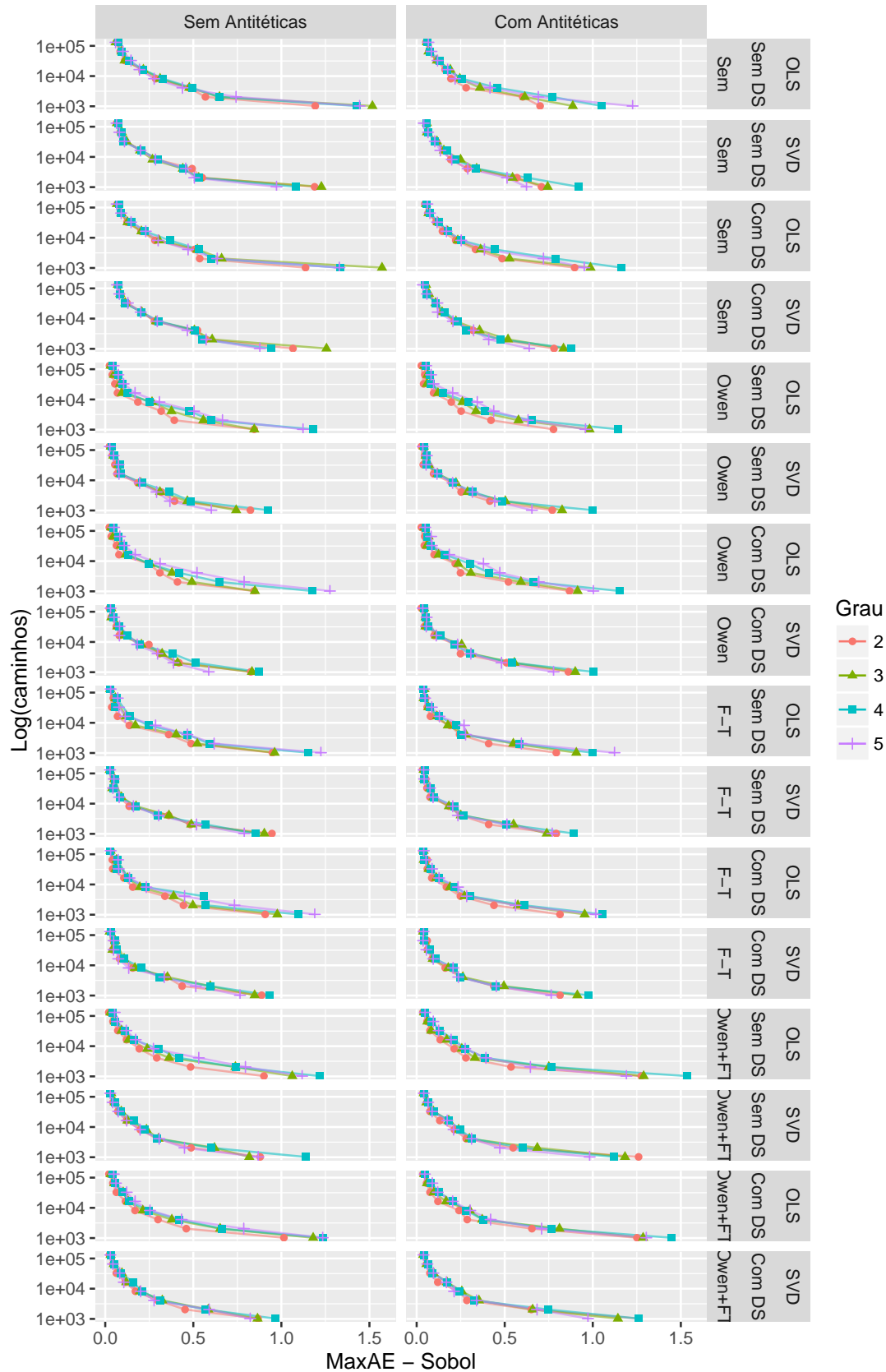


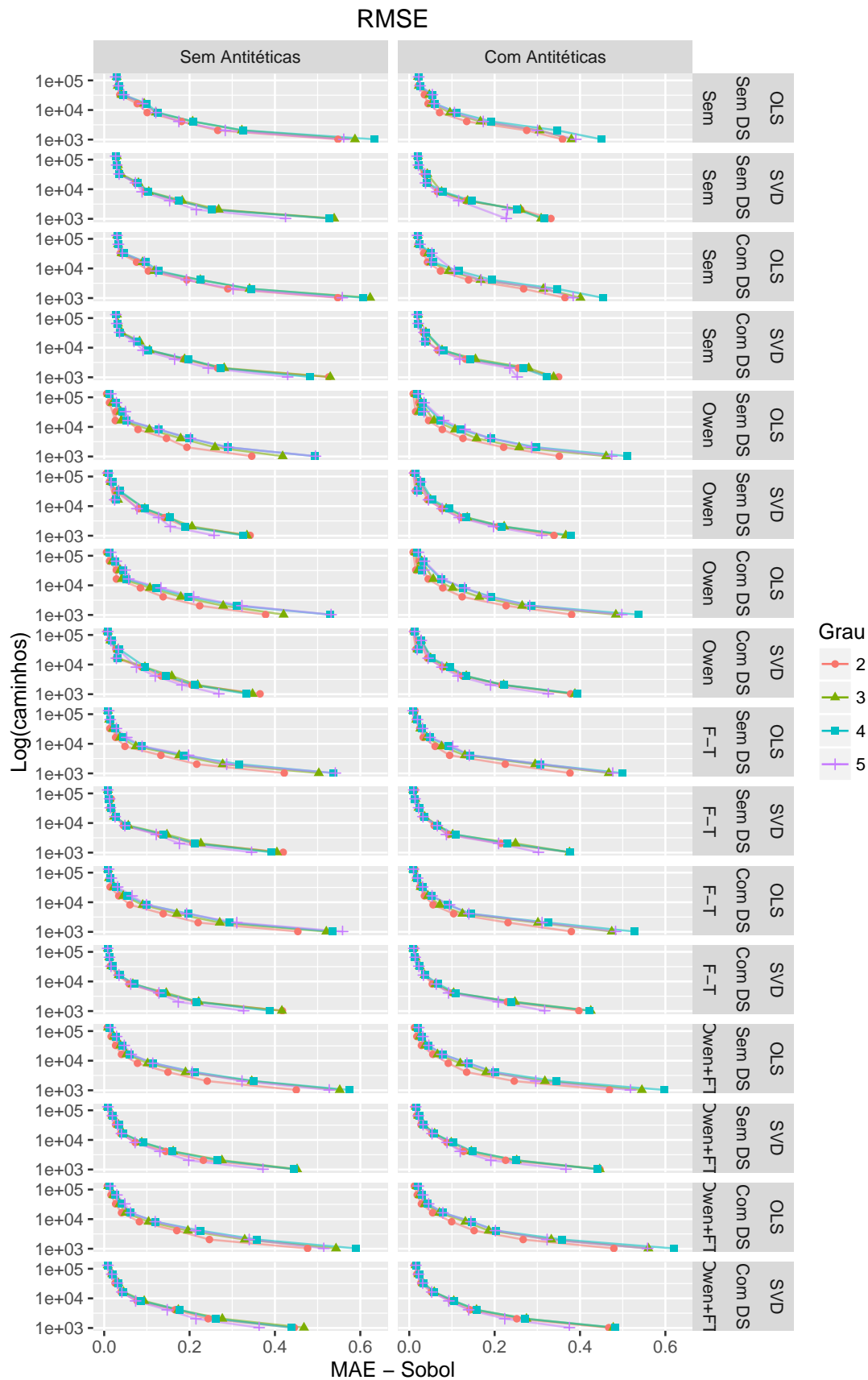


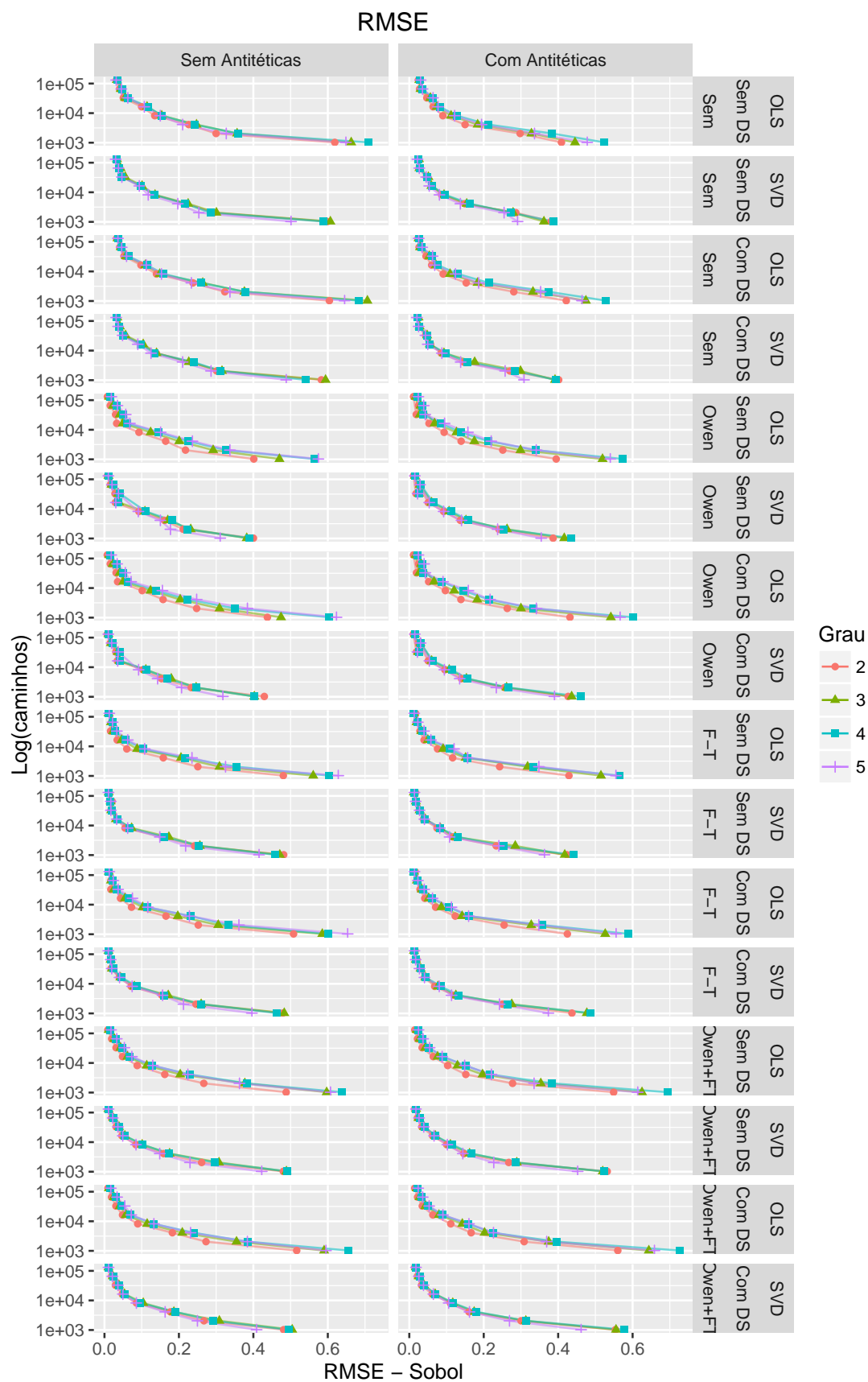




RMSE







Bibliografia

- Acworth, Peter A, Mark Broadie e Paul Glasserman (1998). A comparison of some monte carlo and quasi monte carlo techniques for option pricing. In: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1996*. pp. 1–18. Springer. [57](#), [58](#)
- Åkesson, Fredrik e John P Lehoczky (2000). Path generation for quasi-monte carlo simulation of mortgage-backed securities. *Management Science* **46**(9), 1171–1187. [58](#)
- Amin, Kaushik e Victor Ng (1993). Arch processes and option valuation. *Manuscript, University of Michigan*. [16](#)
- Andersson, Jonas (2001). On the normal inverse gaussian stochastic volatility model. *Journal of Business & Economic Statistics* **19**(1), 44–54. [60](#)
- Areal, Nelson, Artur Rodrigues e Manuel R Armada (2008). On improving the least squares monte carlo option valuation method. *Review of Derivatives Research* **11**(1-2), 119–151. [20](#)
- Asmussen, Søren e Peter W Glynn (2007). *Stochastic simulation: Algorithms and analysis*. Vol. 57. Springer Science & Business Media. [53](#)
- Balbás, A., R. Romera e E. Ruiz (2005). An overview of probabilistic and time series models in finance. *Recent Advances in Applied Probability* pp. 27–63. [8](#), [14](#)
- Barndorff-Nielsen, O (1978). Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae. *Scandinavian Journal of statistics* pp. 151–157. [60](#)
- Barndorff-Nielsen, Ole E (1997). Processes of normal inverse gaussian type. *Finance and stochastics* **2**(1), 41–68. [60](#)

- Barone-Adesi, G., R.F. Engle e L. Mancini (2008). A GARCH option pricing model with filtered historical simulation. *Review of Financial Studies*. **3**, 18, 119
- Barraquand, Jérôme e Didier Martineau (1995). Numerical valuation of high dimensional multivariate american securities. *Journal of financial and quantitative analysis* **30**(03), 383–405. 20
- Bingham, Nicholas H e Rüdiger Kiesel (2013). *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives*. Springer Science & Business Media. 82
- Black, F. e M. Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*. 19
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics* **31**(3), 307–327. 15
- Bollerslev, T. (2008). Glossary to ARCH (GARCH). CREATES Research Paper 2008-49. *SSRN eLibrary*. 16
- Bollerslev, T, RY Chou e KF Kroner (1992). Arch modeling in finance. *Journal of Econometrics* **52**, 5–59. 15
- Bollerslev, Tim, Robert F Engle e Daniel B Nelson (1994). Arch models. *Handbook of econometrics* **4**, 2959–3038. 2, 11, 18
- Boyle, Phelim, Mark Broadie e Paul Glasserman (1995). Recent advances in simulation for security pricing. In: *Proceedings of the 27th conference on Winter simulation*. IEEE Computer Society. pp. 212–219. 57
- Boyle, Phelim, Mark Broadie e Paul Glasserman (1997). Monte carlo methods for security pricing. *Journal of economic dynamics and control* **21**(8), 1267–1321. 20, 57
- Boyle, Phelim P (1977). Options: A monte carlo approach. *Journal of financial economics* **4**(3), 323–338. 23
- Broadie, M e J Detemple (1997). Recent advances in numerical methods for pricing derivative securities. *Numerical Methods in Finance* **13**, 43. 104
- Brooks, Chris (2014). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge university press. 8

- Caffisch, Russel E, William J Morokoff e Art B Owen (1997). *Valuation of mortgage backed securities using Brownian bridges to reduce effective dimension*. Department of Mathematics, University of California, Los Angeles. [29](#), [57](#)
- Campbell, John Y, Andrew Wen-Chuan Lo, Archie Craig MacKinlay et al. (1997). *The econometrics of financial markets*. Vol. 2. princeton University press Princeton, NJ. [8](#), [11](#)
- Carriere, Jacques F (1996). Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression. *Insurance: mathematics and Economics* **19**(1), 19–30. [20](#)
- Chakraborti, Anirban, Ioane Muni Toke, Marco Patriarca e Frédéric Abergel (2011). Econophysics review: I. empirical facts. *Quantitative Finance* **11**(7), 991–1012. [11](#)
- Christoffersen, Peter, Kris Jacobs e Chayawat Ornathanalai (2013). Garch option valuation: theory and evidence. *Available at SSRN 2054859*. [16](#), [60](#)
- Christoffersen, Peter, Steve Heston e Kris Jacobs (2006). Option valuation with conditional skewness. *Journal of Econometrics* **131**(1â2), 253 – 284. [2](#), [21](#)
- Cont, Rama (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. [2](#), [11](#), [12](#), [14](#), [18](#)
- Cont, Rama (2007). Volatility clustering in financial markets: empirical facts and agent-based models. In: *Long memory in economics*. pp. 289–309. Springer. [13](#)
- Cox, John C, Stephen A Ross e Mark Rubinstein (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics* **7**(3), 229–263. [82](#)
- Dawid, A Philip (1984). Present position and potential developments: Some personal views: Statistical theory: The prequential approach. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)* pp. 278–292. [123](#)
- Dick, Josef e Friedrich Pillichshammer (2010). *Digital nets and sequences: Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration*. Cambridge University Press. [33](#), [34](#), [35](#)
- Dick, Josef, Frances Y Kuo e Ian H Sloan (2013a). High-dimensional integration: the quasi-monte carlo way. *Acta Numerica* **22**, 133–288. [24](#), [26](#), [29](#), [39](#)

- Dick, Josef, Frances Y Kuo, Gareth W Peters e Ian H Sloan (2013b). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2012*. Springer. [23](#)
- Diebold, Francis X, Todd A Gunther e Anthony S Tay (1998). Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review* pp. 863–883. [65](#), [123](#)
- Drmosta, Michael, Robert F Tichy e Edmund Hlawka (1997). Sequences, discrepancies and applications. *Lecture notes in mathematics*. [34](#)
- Duan, Jin-Chuan (1995). The garch option pricing model. *Mathematical finance* **5**(1), 13–32. [16](#), [60](#), [84](#), [85](#)
- Duan, Jin Chuan (1999). Conditionally fat-tailed distributions and the volatility smile in options. *Rotman School of Management, University of Toronto, Working Paper*. [21](#)
- Duan, Jin-Chuan e Jean-Guy Simonato (1998). Empirical martingale simulation for asset prices. *Management Science* **44**(9), 1218–1233. [104](#), [118](#)
- Duan, Jin-Chuan e Jean-Guy Simonato (2001). American option pricing under garch by a markov chain approximation. *Journal of Economic Dynamics and Control* **25**(11), 1689–1718. [16](#), [20](#), [21](#), [59](#), [84](#), [86](#), [103](#)
- Engle, R. (2004). Risk and volatility: Econometric models and financial practice. *American Economic Review* **94**(3), 405–420. [15](#), [16](#)
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **50**(4), 987–1007. [14](#)
- Engle, Robert F e Victor K Ng (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *The journal of finance* **48**(5), 1749–1778. [16](#), [17](#), [59](#), [73](#), [85](#)
- Faure, Henri (1982). Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension s). *Acta Arithmetica* **4**(41), 337–351. [38](#)
- Forsberg, Lars e Tim Bollerslev (2002). Bridging the gap between the distribution of realized (ecu) volatility and arch modelling (of the euro): the garch-nig model. *Journal of Applied Econometrics* **17**(5), 535–548. [60](#)

- Gavrishchaka, Valeriy V e Supriya B Ganguli (2003). Volatility forecasting from multiscale and high-dimensional market data. *Neurocomputing* **55**(1), 285–305. [14](#)
- Giles, Mike, Frances Y Kuo, Ian H Sloan e Benjamin J Waterhouse (2008). Quasi-monte carlo for finance applications. *ANZIAM Journal* **50**, 308–323. [58](#)
- Glasserman, Paul (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Vol. 53. Springer. [23](#), [30](#), [47](#)
- Glosten, L.R., R. Jagannathan e D.E. Runkle (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of finance* **48**(5), 1779–1801. [16](#)
- Gneiting, Tilmann e Adrian E Raftery (2007). Strictly proper scoring rules, prediction, and estimation. *Journal of the American Statistical Association* **102**(477), 359–378. [123](#)
- Gneiting, Tilmann, Fadoua Balabdaoui e Adrian E Raftery (2007). Probabilistic forecasts, calibration and sharpness. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* **69**(2), 243–268. [123](#)
- Griebel, Michael, Frances Kuo e Ian Sloan (2013). The smoothing effect of integration in $\hat{\alpha}^{\delta}$ and the anova decomposition. *Mathematics of Computation* **82**(281), 383–400. [58](#)
- Hafner, Christian M e Helmut Herwartz (2001). Option pricing under linear autoregressive dynamics, heteroskedasticity, and conditional leptokurtosis. *Journal of Empirical Finance* **8**(1), 1–34. [21](#)
- Halton, John H (1960). On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik* **2**(1), 84–90. [38](#)
- Hammersley, JM e KW Morton (1956). A new monte carlo technique: antithetic variates. In: *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. Vol. 52. Cambridge Univ Press. pp. 449–475. [45](#)
- Heath, D. e M. Schweizer (2000). Martingales versus PDEs in finance: an equivalence result with examples. *Journal of Applied Probability* **37**(4), 947–957. [19](#)

- Heston, S.L. e S. Nandi (2000). A closed-form GARCH option valuation model. *Review of Financial Studies* **13**(3), 585. [16](#), [19](#)
- Hsieh, KC e Peter Ritchken (2005). An empirical comparison of garch option pricing models. *Review of derivatives research* **8**(3), 129–150. [59](#)
- Jäckel, Peter e Russ Bubley (2002). *Monte Carlo methods in finance*. J. Wiley. [23](#)
- Jank, Wolfgang (2005). Quasi-monte carlo sampling to improve the efficiency of monte carlo em. *Computational statistics & data analysis* **48**(4), 685–701. [58](#)
- Jensen, Morten B e Asger Lunde (2001). The nig-s&arch model: A fat-tailed, stochastic, and autoregressive conditional heteroskedastic volatility model. *The Econometrics Journal* **4**(2), 319–342. [60](#)
- Jonen, Christian (2009). An efficient implementation of a least squares monte carlo method for valuing american-style options. *International Journal of Computer Mathematics* **86**(6), 1024–1039. [20](#)
- Joy, Corwin, Phelim P Boyle e Ken Seng Tan (1996). Quasi-monte carlo methods in numerical finance. *Management Science* **42**(6), 926–938. [57](#)
- Kelton, W. David (2006). Chapter 7 implementing representations of uncertainty. In: *Simulation* (Shane G. Henderson and Barry L. Nelson, Eds.). Vol. 13 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*. pp. 181 – 191. Elsevier. [47](#)
- Kolb, R.W. e J.A. Overdahl (2007). *Futures, options, and swaps*. Wiley-Blackwell. [8](#)
- Kroese, Dirk P, Thomas Taimre e Zdravko I Botev (2013). *Handbook of Monte Carlo Methods*. Vol. 706. John Wiley & Sons. [23](#)
- Kucherenko, Sergei, Daniel Albrecht e Andrea Saltelli (2011). Comparison of latin hypercube and quasi monte carlo sampling techniques. [55](#)
- Larcher, G e G Leobacher (2005). Quasi-monte carlo and monte carlo methods and their application in finance. *Surveys on Mathematics for Industry* **11**, 95–130. [23](#)
- L’Ecuyer, Pierre (2004). Quasi-monte carlo methods in finance. In: *Proceedings of the 36th conference on Winter simulation*. Winter Simulation Conference. pp. 1645–1655. [58](#)

- L'Ecuyer, Pierre e Christiane Lemieux (2005). Recent advances in randomized quasi-monte carlo methods. In: *Modeling uncertainty*. pp. 419–474. Springer. [29](#)
- Lemieux, C. (2006). Chapter 12 quasi-random number techniques. In: *Simulation* (Shane G. Henderson and Barry L. Nelson, Eds.). Vol. 13 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*. pp. 351 – 379. Elsevier. [58](#)
- Lemieux, Christiane (2009). *Monte Carlo and Quasi-Monte-Carlo Sampling*. Springer. [23](#), [24](#), [44](#), [46](#), [47](#), [53](#), [56](#)
- Lemieux, Christiane e Pierre L'Ecuyer (2001). On the use of quasi-monte carlo methods in computational finance. In: *Computational Science-ICCS 2001*. pp. 607–616. Springer. [29](#), [58](#)
- Leobacher, Gunther e Friedrich Pillichshammer (2014). *Introduction to quasi-Monte Carlo integration and applications*. Springer. [26](#), [27](#), [31](#), [35](#), [36](#)
- Li, Jenny X e Gary L Mullen (2000). Parallel computing of a quasi-monte carlo algorithm for valuing derivatives. *Parallel Computing* **26**(5), 641–653. [58](#)
- Li, Jenny X e Peter Winker (2003). Time series simulation with quasi monte carlo methods. *Computational Economics* **21**(1-2), 23–43. [58](#), [63](#), [64](#), [65](#)
- Longstaff, F.A. e E.S. Schwartz (2001). Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies* **14**(1), 113. [2](#), [20](#), [81](#), [83](#), [84](#), [86](#), [96](#), [104](#)
- Malmsten, Hans e Timo Teräsvirta (2004). Stylized facts of financial time series and three popular models of volatility. *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, Stockholm School of Economics*. [11](#), [18](#)
- Mandelbrot, Benoit (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business* **36**(4), 394–419. [12](#)
- McLeish, Don L (2011). *Monte Carlo simulation and finance*. Vol. 276. John Wiley & Sons. [23](#)
- Metropolis, Nicholas (1987). The beginning of the monte carlo method. *Los Alamos Science* **15**(584), 125–130. [23](#)

- Metropolis, Nicholas e Stanislaw Ulam (1949). The monte carlo method. *Journal of the American statistical association* **44**(247), 335–341. [23](#)
- Mikosch, Thomas (2003). Modeling dependence and tails of financial time series. *Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment* pp. 185–286. [11](#)
- Mitra, S. (2009). A Review of Volatility and Option Pricing. *Arxiv preprint arXiv:0904.1292*. [19](#)
- Moreno, Manuel e Javier F Navas (2003). On the robustness of least-squares monte carlo (lsm) for pricing american derivatives. *Review of Derivatives Research* **6**(2), 107–128. [20](#)
- Neftci, S.N. (2000). *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. Academic Pr. [19](#)
- Nelson, Barry L (1987). Variance reduction for simulation practitioners. In: *Proceedings of the 19th conference on Winter simulation*. ACM. pp. 43–51. [47](#)
- Nelson, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **59**(2), 347–370. [17](#), [59](#)
- Niederreiter, Harald (1988). Low-discrepancy and low-dispersion sequences. *Journal of number theory* **30**(1), 51–70. [38](#)
- Niederreiter, Harald (1992). *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*. Vol. 63. SIAM. [23](#), [29](#), [30](#), [33](#)
- Niederreiter, Harald (2012). Low discrepancy simulation. In: *Handbook of Computational Finance*. pp. 703–729. Springer. [27](#), [36](#)
- Ninomiya, Syoiti e Shu Tezuka (1996). Toward real-time pricing of complex financial derivatives. *Applied Mathematical Finance* **3**(1), 1–20. [57](#)
- Ökten, Giray e Warren Eastman (2004). Randomized quasi-monte carlo methods in pricing securities. *Journal of Economic Dynamics and Control* **28**(12), 2399–2426. [29](#), [37](#)
- Paskov, Spassimir (1996). New methodologies for valuing derivatives. [29](#), [57](#)

- Paskov, Spassimir H e Joseph F Traub (1995). Faster valuation of financial derivatives. *The Journal of Portfolio Management* **22**(1), 113–123. [29](#), [57](#)
- Poon, Ser-Huang e Clive WJ Granger (2003). Forecasting volatility in financial markets: A review. *Journal of economic literature* **41**(2), 478–539. [16](#)
- Ritchken, P. e R. Trevor (1999). Pricing options under generalized GARCH and stochastic volatility processes. *The Journal of Finance* **54**(1), 377–402. [20](#), [21](#), [84](#), [96](#), [103](#)
- Rosenblatt, Murray (1952). Remarks on a multivariate transformation. *The annals of mathematical statistics* **23**(3), 470–472. [123](#)
- Schwert, G.W. (1989). Why does stock market volatility change over time?. *Journal of finance* **44**(5), 1115–1153. [17](#)
- Siven, Johannes Vitalis e Jeffrey Todd Lins (2009). Gain/loss asymmetry in time series of individual stock prices and its relationship to the leverage effect. *arXiv preprint arXiv:0911.4679*. [12](#)
- Sobol, IM (1967). The distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals, zh. vychisl. mat. i mat. fiz. 7 (1967), 784–802. [38](#)
- Stentoft, L. (2005). Pricing American options when the underlying asset follows GARCH processes. *Journal of Empirical Finance* **12**(4), 576–611. [16](#), [19](#), [20](#), [21](#), [60](#), [84](#), [86](#), [103](#)
- Stentoft, Lars (2004a). Assessing the least squares monte-carlo approach to american option valuation. *Review of Derivatives research* **7**(2), 129–168. [20](#)
- Stentoft, Lars (2004b). Convergence of the least squares monte carlo approach to american option valuation. *Management Science* **50**(9), 1193–1203. [20](#)
- Stentoft, Lars (2008a). American option pricing using garch models and the normal inverse gaussian distribution. *Journal of Financial Econometrics* **6**(4), 540–582. [16](#), [21](#), [59](#), [60](#), [62](#)
- Stentoft, Lars (2008b). Value function approximation or stopping time approximation: a comparison of two recent numerical methods for american option pricing using simulation and regression. *Available at SSRN 1315306*. [20](#), [21](#)

- Stentoft, Lars (2011). American option pricing with discrete and continuous time models: An empirical comparison. *Journal of Empirical Finance* **18**(5), 880–902. [59](#)
- Stentoft, Lars (2013). American option pricing using simulation: An introduction with an application to the garch option pricing model. *Handbook of research methods and applications in empirical finance*, Adrian Bell, Chris Brooks, Marcel Prokopczuk, eds., Edward Elgar Publishing. [16](#), [20](#), [81](#), [82](#)
- Tan, Ken Seng e Phelim P Boyle (2000). Applications of randomized low discrepancy sequences to the valuation of complex securities. *Journal of Economic Dynamics and Control* **24**(11), 1747–1782. [29](#)
- Taylor, S.J. e S. Taylor (1986). *Modelling financial time series*. John Wiley & Sons. [17](#)
- Teräsvirta, T. (2009). An introduction to univariate GARCH models. *Handbook of Financial Time Series* pp. 17–42. [8](#), [14](#)
- Tezuka, Shu (2002). Quasi-monte carloâdiscrepancy between theory and practice. In: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2000*. pp. 124–140. Springer. [58](#)
- Tezuka, Shu (2005). On the necessity of low-effective dimension. *Journal of Complexity* **21**(5), 710–721. [58](#)
- Thas, Olivier (2010). *Comparing distributions*. Springer. [65](#)
- Tilley, James A (1993). Valuing american options in a path simulation model. *Transactions of the Society of Actuaries* **45**(83), 104. [20](#)
- Tsay, Ruey S (2005). *Analysis of financial time series*. Vol. 543. John Wiley & Sons. [8](#), [11](#)
- Tsitsiklis, John N e Benjamin Van Roy (2001). Regression methods for pricing complex american-style options. *Neural Networks, IEEE Transactions on* **12**(4), 694–703. [20](#)
- Wang, Xiaoqun e Ian H Sloan (2011). Quasi-monte carlo methods in financial engineering: An equivalence principle and dimension reduction. *Operations Research* **59**(1), 80–95. [18](#), [58](#)
- Wang, Xiaoqun e Kai-Tai Fang (2003). The effective dimension and quasi-monte carlo integration. *Journal of Complexity* **19**(2), 101–124. [58](#)

- Zakoian, Jean-Michel (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and control* **18**(5), 931–955. [16](#), [17](#), [59](#)
- Zivot, Eric (2009). Practical issues in the analysis of univariate garch models. In: *Handbook of financial time series*. pp. 113–155. Springer. [2](#), [11](#), [18](#)
- Zumbach, Gilles (2015). Cross-sectional universalities in financial time series. *Quantitative Finance* **15**(12), 1901–1912. [11](#)